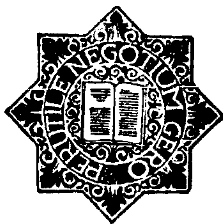
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

10e JAARGANG 1933/34, Nr. 4



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het voor Nieuw Tijdschrift Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

EEN GRAFISCHE VOORSTELLING NAAR AANLEIDING VAN DE BEWEGING VAN EEN STOFFELIJK PUNT IN EEN VERTICALEN CIRKEL

DOOR

Dr. JOH. H. WANSINK, Arnhem.

In verband met de moeilijkheden, die zich voordoen bij de bestudeering van de beweging van een stoffelijk punt in een verticalen cirkel voor het geval, dat de snelheid van het bewegende punt in het laagste punt van dien cirkel zóó groot is, dat het in staat is een boog van meer dan 90^0 te doorloopen (gemeten vanaf dat laagste punt), lijkt het me gewenscht het verband tusschen enkele in dit probleem optredende grootheden door *een eenvoudige grafische voorstelling* te illustreeren.

Zij de massa van het stoffelijk punt m, de snelheid in het benedenste punt A van den verticalen cirkel, waarin het punt zich beweegt v_0, de straal van dien cirkel r, de versnelling der zwaartekracht g, dan vinden we:

a) met de „*wet van Levende Kracht en Arbeid*":

$$v_P^2 = v_0^2 - 2\,g.r.\ (1 - \cos\varphi)$$

b) met de „*formule van Huygens*":

$$S_P = \frac{m\ .\ v_P^2}{r} + m.g.\ \cos\varphi,$$

indien v_P de snelheid is van het stoffelijk punt in een punt P van den verticalen cirkel, φ de doorloopen boog (gemeten vanaf het punt A in hoekmaat) en S_P de spanning van het onrekbare koord ter lengte van r, waaraan we het punt opgehangen denken.

Laat men het punt zich bewegen aan den binnenkant van een verticaal opgestelde goot, dan gelden dezelfde twee formules, mits men nu de spanning S_P van het koord vervangt door de druk N_P van de goot. Denkt men zich twee verticale concentrische cirkelvormige goten opgesteld (stralen r en $r + \Delta r$, waarin Δr van een grootte is, die t. o. v. r is te verwaarloozen) dan beweegt het punt zich in een verticalen cirkel welks straal we r mogen stellen.

De formules *a*) en *b*) blijven gelden, alléén dient men nu in *b*) negatieve waarden van S_P toe te laten. Zoo'n negatieve waarde beteekent dan een druk van de binnenwand van de verticale buis tegen het stoffelijk punt.

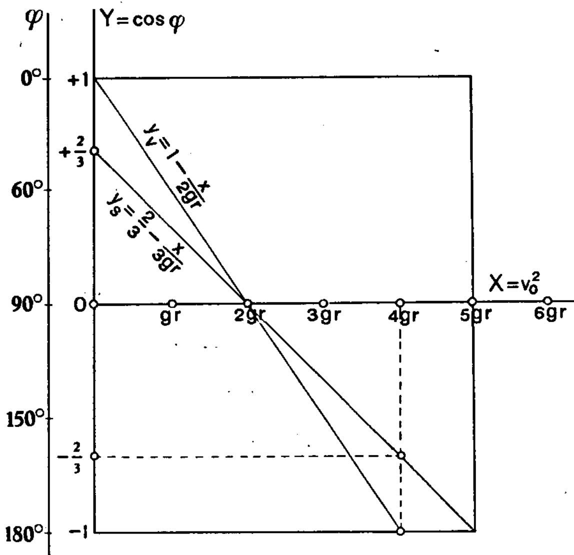
De juistheid der formules *a*) en *b*) wordt aangetoond voor alle waarden van φ.

Stelt men nu de amplitude φ, waarbij resp. de spanning en de snelheid nul worden voor door φ_s en φ_v, dan vindt men uit *a*) en *b*):

$$\cos \varphi_s = \frac{2gr - v_0^2}{3gr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$$\cos \varphi_v = \frac{2gr - v_0^2}{2gr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Het zijn deze beide formules, die we grafisch willen voorstellen. Stellen we $\cos \varphi_s = y$ en $v_0^2 = x$, dan gaat (I) over in:



$$y = \frac{2}{3} - \frac{x}{3gr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I^*)$$

Stellen we $\cos \varphi_v = y$ en $v_0^2 = x$, dan gaat (II) over in:

$$y = 1 - \frac{x}{2gr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II^*)$$

Beide vergelijkingen zijn van den eersten graad in x en y en *worden dus grafisch voorgesteld door rechte lijnen.*

Van deze rechte lijnen laten we de gedeelten links van de y-as

weg, omdat x ($= v_0^2$) niet negatief kan worden. Ook van de resteerende halfstralen moet nog een gedeelte weggelaten worden in verband met het feit, dat $|y| = |\cos\varphi| \leq 1$ is, zoodat er slechts twee lijnsegmenten overblijven.

We teekenen de beide grafische voorstellingen op één assenkruis. Naast de y-as brengen we *een tweede schaalverdeeling* aan (φ-as), waarop we de hoeken φ aangeven, die bij de op de y-as aangegeven waarden van cos φ behooren.

We gaan nu den aard der beweging na voor verschillende waarden van de snelheid v_0. [1]).

1°. $v_0^2 < 2\,gr$: uit de figuur lezen we af, dat $v = 0$ wordt bij een kleinere amplitude dan waarbij $S = 0$ zou worden; deze amplitude is kleiner dan 90°; het punt zal dus heen en weer schommelen. Ingeval we een verticale buis hebben, drukt de buitenwand van de goot steeds tegen het stoffelijk punt.

2°. $v_0^2 = 2\,gr$: uit de figuur lezen we af, dat v en S gelijktijdig nul worden en wel bij een amplitude van 90°; ook nu zal het stoffelijk punt heen en weer schommelen. Ingeval we een verticale buis hebben, drukt de buitenwand van de goot steeds tegen het stoffelijk punt *behalve* in de uiteinden van de doorloopen boog (voor $\varphi = \pm 90°$).

3°. $v_0^2 > 2\,gr$ maar $< 4\,gr$: nu wordt $S = 0$ bij een kleinere amplitude dan waarbij $v = 0$ zou worden. Ingeval het punt aan een koord was opgehangen, zal het den cirkel gaan verlaten en een verticale parabool (kogelbaan) gaan beschrijven. Doorloopt het punt een verticale buis, dan zal het punt ook nadat $S = 0$ ($N = 0$) geworden is in den cirkel blijven; nu verandert N van teeken, zoodat de binnenwand tegen het punt gaat drukken. Uit de grafiek blijkt, dat v nul wordt bij een amplitude $< 180°$, waarna het punt terugvalt.

4°. $v_0^2 = 4\,gr$: $S = 0$ voor cos $\varphi = -\,^2/_3$; v is dan nog niet nul. Ingeval het punt aan een koord was opgehangen, zal het den cirkel gaan verlaten (zie 3°). Doorloopt het een verticale buis, dan zal het punt bij $\varphi =$ hk cos $-\,^2/_3$ „van wand verwisselen". Uit de figuur blijkt, dat $v = 0$ wordt voor $\varphi = 180°$; hier komt het punt tot rust (labiel evenwicht!).

---

[1]) Zie ook: *Mechanica* voor het *M. O.* door Dr. H. J. Beth en Dr. P. J. van Loo, § 79.

5°. $v_0^2 > 4\ gr$ maar $< 5\ gr$: $S = 0$ voor een hoek $\varphi < 180^0$ (maar grooter dan die uit de vorige alinea); v is dan nog niet nul. Ingeval het punt aan een koord was opgehangen, zal het den cirkel gaan verlaten (zie 3°). Doorloopt het een verticale buis, dan zal het bij bedoelde amplitude „van wand verwisselen". Uit de figuur zien we echter, dat v niet nul kan worden! (immers v zou nul worden voor een hoek, waarvan de cosinus < -1 zou moeten zijn!) Het punt passeert het hoogste punt van den verticalen cirkel en gaat langs de andere helft weer naar beneden.

6°. $v_0^2 = 5\ gr$: nu wordt $S = 0$ voor $\varphi = 180^0$; v is dan nog niet nul. Het stoffelijk punt passeert dus weer het hoogste punt van den verticalen cirkel. Ingeval we een verticale buis hebben, drukt steeds de buitenwand tegen het punt behalve voor $\varphi = 180^0$; daar drukt nóch de buitenwand nóch de binnenwand tegen het punt.

7°. $v_0^2 > 5\ gr$: nu wordt nóch S nóch v nul. Het punt blijft, als in het vorige geval, steeds in den verticalen cirkel, óók als het aan een koord is opgehangen. Ingeval we een verticale buis hebben, drukt overal de buitenwand tegen het punt aan.

In deze beschouwingen is o. a. uitgegaan van het feit, dat voor elke v_0 voor $\varphi = 0$ S positief is, dus, dat de buitenwand (ingeval van een verticale buis) tegen het punt drukt: zoolang nu S niet 0 geweest is, blijft de buitenwand drukken. Teekenwisseling van S bij φ_s beteekent: „verwisseling van wand". (Uit de formules kan worden nagegaan, dat bij φ_s inderdaad teekenwisseling plaats heeft).

Het komt mij voor, dat bij de behandeling van de beweging in een verticalen cirkel deze grafische voorstelling verhelderend kan werken.

NASCHRIFT OP DE ENQUÊTE OVER *i*.

Prof. G. Mannoury, die in de vorige aflevering vermeld is onder de voorstanders van het voorstel van Wijdenes in zake *i*, heeft de redactie verzocht er de aandacht op te vestigen, dat hij uitsluitend bezwaar heeft tegen de vorm, waarin het onderwerp „complexe getallen" nog maar al te vaak wordt gegeven.

De redactie verwijst de lezers naar het artikel „De bestaanbaarheid van *i*" van Prof. Mannoury in de vorige aflevering.

EPISTEMISCH WISKUNDE-ONDERWIJS [1])

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

Het is op enkele weken na negen jaar geleden, dat ik het genoegen had, voor uwe vereeniging het woord te voeren over een onderwerp uit de didactiek der wiskunde. Dat is een voordracht geweest, waaraan ik nog steeds een dankbare herinnering bewaar, omdat, naar het mij althans in mijn persoonlijken kijk op de ontwikkeling van het Nederlandsche wiskunde-onderwijs voorkomt, de werkzaamheid van uw bestuur in die dagen niet zonder beteekenis is geweest voor den loop der gebeurtenissen. Staat u mij toe, dit, als inleiding tot mijn eigenlijke voordracht, door een korte historische beschouwing te mogen toelichten. Er bestond, zooals ik aan de ouderen onder u in herinnering mag brengen en aan de jongeren kan meedeelen, in de jaren 1920—1925 in ons land een zeer gedeprimeerde stemming aangaande de waarde der wiskunde als leervak op scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs. Er waren wijzigingen aangebracht in het programma der H.B.S., die, inplaats van de reeds zoo lang verwachte en vaak bepleite verdere ontwikkeling van het wiskundig onderwijs, een belangrijke beperking daarvan in invloed en omvang hadden bewerkt en die een zeer schadelijken invloed op den goeden gang van zaken hadden uitgeoefend. Er was een nieuw H.B.S.-type ingesteld, tegenwoordig H.B.S. A genoemd, maar toen nog algemeen bekend onder den hybridischen naam van litterair-oeconomische H.B.S., dat aangeprezen werd als reactie op wat men — zonder eenig recht — de steeds verder gaande ontwikkeling van het burgerschoolonderwijs in mathematisch-physische richting noemde en dat door de voorstanders, ondanks de vrijwel volkomen vernietiging van het wis- en natuurkundige deel van het programma, gaarne als geheel gelijkwaardig met de oorspronkelijke

---

[1]) Voordracht, gehouden op 12 Februari 1934 voor de *Vereeniging voor Paedagogisch Onderwijs* aan de Rijksuniversiteit te Groningen.

H.B.S. werd beschouwd. Men verspreidde met kennelijke instemming uitlatingen van vooraanstaande wiskundigen, die van een volslagen wanhoopsstemming over de resultaten van het wiskundeonderwijs op de middelbare school getuigden; men hechtte groote waarde aan de resultaten van zekere psychologische onderzoekingen, die de overtuiging van vele mathematici, dat zij door hun werk in belangrijke mate tot de geestelijke vorming van hun leerlingen bijdroegen, tot een illusie schenen te verklaren; en men was geneigd, toe te geven aan een tijdgeest, die wel graag de degelijkheid van het onderwijs wilde opofferen aan de angst voor geestelijke overbelasting der schooljeugd. Al die opvattingen vonden hun aanhangers ook binnen de kringen der wiskundedocenten en men overdrijft niet, als men gewaagt van een waar defaitisme in hun rijen over de waarde van het werk, waaraan zij zich nu eenmaal hadden gewijd. Stemmen, die de wiskunde als leervak in het M.O. op andere gronden dan op die der toepasbaarheid in de natuurwetenschap of op die der onmisbaarheid in verdere studie verdedigden, werden maar zelden meer vernomen en men was in die dagen bijna origineel, wanneer men grondig wiskundeonderwijs voor alle leerlingen van alle schooltypen durfde bepleiten.

In het jaar 1924 werd de beschreven stemming van depressie en defaitisme nog versterkt door het verschijnen van een opzienbarende brochure van Mevr. T. Ehrenfest-Afanassjewa onder den titel: „Wat kan en moet het meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven?", waarin een ernstige kritiek werd uitgeoefend op de in ons land gangbare methoden van meetkunde-onderwijs. De schrijfster, die èn om haar wetenschappelijke begaafdheid èn om haar vurige belangstelling in de problemen der didactiek als bij uitstek deskundig in de behandelde materie mocht worden beschouwd, kwam tot de conclusie, dat het doel, dat het wiskunde-onderwijs gewoonlijk geacht werd na te streven, namelijk de ontwikkeling van het logisch denken, als regel juist niet werd bereikt. Zij constateerde een verwarring van de intuitieve ruimteleer en de abstracte axiomatica, zich openbarend in een praematuur bewijzen van stellingen, die intuitief zoo duidelijk zijn, dat aan een bewijs als overtuigingsmiddel geen behoefte wordt gevoeld; ze verwierp als ontoereikend de z.g. methode der volharding, die gunstige resultaten verwacht van het inprenten der in correcten vorm geformu-

leerde uitkomsten van het denken van anderen, inplaats van eigen werkzaamheid der leerlingen te bevorderen en zoodoende de behoefte aan logisch denken eerst te ontwikkelen; en ze stelde een sterke overlading van den gebruikelijken meetkunde-leergang vast, veroorzaakt door het inruimen van een te groote plaats aan afgeleide stellingen en toepassingen naast de fundamenteele stellingen van het systeem. Deze brochure trok de aandacht tot ver buiten de kringen van het wiskunde-onderwijs en versterkte daar den indruk, dat er met dat onderwijs toch zeker iets niet in den haak moest zijn, wanneer er door bekende wiskundigen zelf zoo veel kritiek op kon worden uitgeoefend.

Onder de leeraren in wiskunde werden de beschouwingen van mevrouw Ehrenfest over het algemeen met weinig sympathie ontvangen; daarbij was voor een groot deel ongetwijfeld misverstand in het spel, veroorzaakt deels door een zekere vaagheid in het betoog, die eerst in den loop der volgende discussies verdwenen is, deels doordat de gemiddelde Nederlandsche wiskunde-docent nog weinig gewend was aan theoretische beschouwingen over de didactiek van zijn vak. De hoofdzaak was echter toch wel een principieele tegenstand tegen een opvatting van meetkunde-onderwijs, die wat al te heftig met een historisch gegroeide methode scheen te willen breken. Er ontstond een polemiek, die de directe aanleiding werd tot een van de eerste symptomen van reactie op de heerschende stemming van kritiek en moedeloosheid, nl. de oprichting in October 1924 van een tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken, dat, na eerst gedurende enkele jaren als Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde te zijn verschenen, tot op heden onder den naam van Euclides een niet onbelangrijke functie in de ontwikkeling van het Nederlandsche wiskunde-onderwijs vervult.

Kort daarna heeft toen uwe vereeniging het hare er toe bijgedragen, de aandacht voor de didactische problemen der wiskunde te verlevendigen. In de eerste dagen van 1925 heeft ze in een reeks van drie lezingen de kwestie van het begin-onderwijs in meetkunde door drie verschillende sprekers laten behandelen; ze heeft Mevr. Ehrenfest in de gelegenheid gesteld, om haar standpunt nader toe te lichten; ze heeft Dr. Lietzmann uit Göttingen om een behandeling van de Duitsche opvattingen op dit punt gevraagd en ze heeft mij uitgenoodigd, de bezwaren uiteen te zetten, die tegen de

nieuwere stroomingen konden worden ingebracht. Door die breede wijze van bestudeering van het probleem heeft zij ongetwijfeld een zeer nuttig werk verricht; men kon weliswaar niet zeggen, dat er een bepaalde oplossing werd bereikt, maar het kwam er in die dagen voor alles op aan, dat er belangstelling voor vragen van didactischen aard werd gewekt, dat men de onderwijsmethoden niet langer als vanzelf sprekende onveranderlijkheden aanvaardde, maar die methoden zelfs als probleem stelde.

Een maand later is toen, eveneens hier vanuit Groningen, een nieuwe stoot in die richting uitgegaan. Het 20e Nederlandsche Natuur- en Geneeskundig Congres, dat van 14 tot 16 April 1925 hier vergaderde, heeft nl. een speciale bijeenkomst aan de didactiek der wiskunde gewijd, waarop uiting werd gegeven aan het gevoel van onrust over de toekomst van het mathematisch onderwijs, dat langzamerhand steeds breedere kringen was gaan vervullen. Op die bijeenkomst bleek, dat het aantal vurige verdedigers van het goed recht der wiskunde als leervak voor alle scholen van middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs veel grooter was, dan elk in zijn isolement had durven hopen en daardoor reeds oefende zij een gunstigen invloed uit.

Zij had echter nog meer ten gevolge. Het bleek nl., dat ook onder de principieele voorstanders van een intensief wiskunde-onderwijs heelemaal geen algemeene tevredenheid bestond over het vigeerende programma en dat onder hen ten aanzien van menig onderdeel der gebruikelijke methoden een even felle stemming van kritiek bestond als onder hen, die de plaats der wiskunde op grond van ware of vermeende methodische fouten wilden beperken. Om die kritiek vruchtbaar te maken, heeft toen het College van Inspecteurs bij het M. O. een commissie ingesteld, die de opdracht kreeg, te onderzoeken, of het vigeerende leerplan voor wiskunde op de H.B.S. wijziging noodig had en, zoo dit het geval bleek, een nieuw leerplan te ontwerpen. Die Commissie stond onder leiding van Dr. Beth uit Deventer en wordt nog steeds met zijn naam aangeduid. Zij kwam in het voorjaar van 1926 met haar werk klaar en publiceerde toen een ontwerp van een leerplan voor wiskunde, mechanica en kosmographie, dat tot levendige discussies in de kringen van het wiskunde-onderwijs aanleiding heeft gegeven. Een directe practische uitwerking heeft dit plan niet gehad. Het College van Inspecteurs, waaraan het als rapport werd uitgebracht,

schijnt nog steeds bezig te zijn, het te bestudeeren; het werd althans tot dusver noch verworpen noch aanvaard en de Commissie, die op de toezending van het stuk nooit antwoord heeft mogen ontvangen, bestaat nog steeds en wacht, als zij, die geen hope hebben.

Indirect is haar werk echter niet zonder gevolgen gebleven. Toen zij eenmaal uiting had gegeven aan de denkbeelden, die zij als gemeenschappelijk persoonlijk oordeel van haar leden had ontwikkeld, maar die weldra gemeengoed bleken te zijn van tal van wiskunde-docenten, kwamen die denkbeelden in verschillende nieuwe leerboeken tot uiting en het gevolg hiervan was weer, dat het H.B.S.-onderwijs ondanks het gemis aan initiatief van de autoriteiten zich toch langzamerhand eenigszins is gaan ontwikkelen in de richting, die in het leerplan-Beth was aangegeven. Ik moet er van afzien, hier nader in details te treden over den invloed, dien de verschillende leerboeken op die ontwikkeling hebben gehad; ik wil slechts één uitzondering maken, door den naam te noemen van een schrijver die door zijn werken en tijdschriftartikelen een, naar het mij voorkomt, bijzonder heilzame werking heeft uitgeoefend en waarvan ik in ieder geval persoonlijk veel heb geleerd. Het is de Amsterdamsche mathematicus J. H. Schogt, een man, dien men zonder overdrijving het geweten van het Nederlandsche wiskunde-onderwijs zou kunnen noemen, omdat hij met nooit verslappende nauwkeurigheid de methoden, de taal en de symboliek der schoolwiskunde aan een zeer conscientieuse kritiek onderwerpt; zijn leerboeken, die aan leerling en docent beide zeer hooge eischen stellen, worden weliswaar weinig meer gebruikt, maar zij zullen steeds de hoogste waarde houden voor alle wiskunde-docenten en allen, die dit willen worden, wanneer zij er althans naar streven, het beste te bereiken, wat in den beschikbaren tijd met de gegeven leerlingen bereikbaar kan worden geacht.

De toenemende belangstelling in didactische problemen, die van het jaar 1925 af kan worden opgemerkt, had zich intusschen nog op een andere wijze geopenbaard en wel in jaarlijksche bijeenkomsten van wiskunde-leeraren ter bespreking van onderwijsbelangen. Die bijeenkomsten gingen uit van de verschillende vereenigingen van wiskunde-docenten; dat ze echter steeds weer konden worden gehouden en ten slotte zelfs met analoge periodieke vergaderingen van docenten in natuurwetenschappen konden samen-

vloeien tot een tweejaarlijksch congres voor het onderwijs in wis- en natuurkundige vakken, is wel voor het allergrootste deel te danken aan de stuwkracht van Dr. Verrijp te Arnhem, die ook in de jaren van verslapping, die vóór 1925 liggen, nooit moe was geworden, de waarde van wiskundig onderwijs te verdedigen.

De activiteit van de samenwerkende vereenigingen van wiskundeleeraren openbaarde zich in denzelfden tijd ook nog op ander gebied; er werden namelijk in verschillende plaatsen van ons land cursussen voor leeraren georganiseerd, om hen tot de wetenschappelijke beoefening van de didactiek der wiskunde aan te moedigen. Die cursussen zijn echter geen succes geweest; de aanvankelijke belangstelling verslapte al spoedig en in de laatste jaren zijn ze nooit meer gehouden.

De overwegingen, waaruit ze waren voortgekomen, namelijk, dat het wenschelijk is, om in functie zijnde leeraren op de hoogte van hun taak te houden, leidde echter nog tot een andere consequentie, namelijk, dat het nog veel meer noodzakelijk is, om a.s. docenten in wiskunde tot die hoogte te brengen. Er werd daartoe een commissie ingesteld, die onder leiding van Dr. Verrijp het reeds vroeger door de commissie-Beth bestudeerde vraagstuk van de opleiding tot leeraar in wiskunde zou onderzoeken. De nieuwe commissie is haar werk begonnen, door bij de faculteiten van wis- en natuurkunde te informeeren, wat er in het universitaire onderwijs in het belang van de leeraarsopleiding werd gedaan. Zij kwam daarbij tot de conclusie, dat bij het wiskunde-onderwijs aan de Universiteiten practisch geen rekening werd gehouden met het feit, dat de groote meerderheid der studenten in wiskunde bestemd is voor het ambt van leeraar aan H.B.S. of Gymnasium. De commissie ontwierp daarop een plan voor de wijze, waarop de Universiteiten zonder schade voor, ja zelfs ten voordeele van de wetenschappelijke ontwikkeling van den student er toe zouden kunnen medewerken, hem voor te bereiden op zijn later ambt en aldus de belangen van het wiskunde-onderwijs te bevorderen. In andere kringen, onder leeraren in talen en natuurwetenschappen, bleken intusschen soortgelijke bewegingen te zijn ontstaan en het gevolg daarvan was de instelling van een algemeene commissie ter bestudeering van het vraagstuk der leeraarsopleiding, die onder leiding van Prof. Sijmons stond. Deze commissie ontwierp een volledig plan voor een wettelijke regeling van de opleiding van den leeraar,

dat ik in Maart 1930 in een voordracht voor de Natuurphilosophische Faculteitsvereeniging hier te Groningen heb mogen toelichten en verdedigen en dat ik daarom bij sommigen van u misschien nog bekend mag veronderstellen. Het bedoelde plan is tot dusver zonder practische uitwerking gebleven. Het Ministerie van Onderwijs, dat zich bij gemis aan ter zake kundige organen nooit met didactische aangelegenheden heeft kunnen bezig houden, heeft ook op het meer formeele gebied der opleiding niets gedaan en de Universiteiten zijn, grosso modo gesproken, blijven volharden in hun opvatting, dat het haar niet aangaat, wat een student, na voltooiing van zijn academische studiën, met de hem gegeven wetenschappelijke vorming in de maatschappij wil beginnen. Indirecte gevolgen, zooals er van het leerplan-Beth zijn uitgegaan, heeft de actie der commissie-Sijmons ook nauwelijks gehad. Als een der schaarsche lichtpunten in deze weinig verkwikkelijke aangelegenheid kan het feit worden vermeld, dat aan de Groningsche Universiteit door den lector Dr. Ridder een college in de didactiek der wiskunde gegeven wordt, zoodat de Groningsche studenten in wiskunde althans de gelegenheid hebben, zich eenigszins voor te bereiden op den moeilijken overgang, die hen wacht, wanneer ze een leeraarsloopbaan willen beginnen.

Ik heb u hiermee een korte schets gegeven van het verloop der gebeurtenissen in de organisatie van ons wiskunde-onderwijs in de negen jaren, die sedert mijn vorige voordracht zijn verstreken. Het verhaal is, zooals u ziet, weinig verheffend en bij gedeelten zoo eentonig als dat van den buffel van Saidjah's vader. Eigenlijk is het in enkele woorden samen te vatten: voor de hervorming en vernieuwing van het Nederlandsche onderwijs in wiskunde deed de regeering tot dusver niets, de universiteit bijna niets; wat er gebeurd is, is voortgekomen uit de kringen van het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs zelf; het aantal van hen, die hier over voldoende belangstelling en activiteit beschikken, om zich niet neer te leggen bij den toestand, zooals hij nu eenmaal geworden is, is beperkt en het werk, dat zij ten bate van het wiskunde-onderwijs hebben trachten te doen, is zonder veel practisch resultaat gebleven.

Zijn dus deze negen jaren in de organisatie van het Nederlandsche onderwijs in wiskunde verloopen als een dag, ze hebben voor allen, die in dezen tijd actief deel hebben genomen aan het werk,

dat door de leeraren zelf is verricht, de beteekenis gehad van een periode van sterke verruiming van den gezichtskring, van verdieping van aandacht en belangstelling in didactische aangelegenheden, van verscherping van kritiek op vele toestanden en meeningen, die men maar al te lang zonder veel nadenken had aanvaard. Ze hebben er vooral toe bijgedragen, om in de soms hoog loopende meeningsverschillen over doel èn methode van het onderwijs in wiskunde — verschillen waarvan het reëele bestaan gewaarborgd werd door de overtuiging en den ernst, waarmee tegengestelde standpunten werden verdedigd, maar waarvan de diepste grond voor de betrokkenen zelf vaak onontwarbaar was, zoodat men vaak onverwacht een tegenstander vond, waar men een geestverwant verwachtte —, zooal niet een allen bevredigende oplossing te schenken, dan toch een zekere verheldering te brengen, die nu althans in staat stelt, scherp te formuleeren, op welke principieele punten de verschillende opvattingen uiteenloopen.

Ik stel mij nu voor, u vanavond een van die principieele verschilpunten, die, naar het mij voorkomt, de meeningen der wiskundedocenten verdeeld houden, uiteen te zetten en wel niet met de bedoeling, dit te doen als een objectieve buitenstaander, die eerst het pro en daarna met evenveel (of even weinig) overtuiging het contra van een zaak afweegt, maar zeer bepaaldelijk met den opzet, u de waarde te bepleiten, die het eene standpunt in mijn oogen heeft — een waarde zoo fundamenteel, dat voor mij het heele bestaansrecht der wiskunde als leervak er mee staat en valt — en u de verderfelijkheid van de tegenovergestelde opvatting te betoogen.

Het is in dergelijke gevallen altijd gemakkelijk, wanneer men de beide ten aanzien van een of andere kwestie te onderscheiden standpunten elk met een korten naam kan aanduiden, d.w.z. het is gemakkelijk, als men zulke namen kan gebruiken, maar het is moeilijk en gevaarlijk, ze te kiezen. Want onwillekeurig legt men in de nomenclatuur al een waardeering, daardoor vooruitloopend op het resultaat, dat het betoog eerst moet opleveren; men duidt het eigen standpunt aan door wat daarin het meest waarde schijnt te hebben en karakteriseert de opvatting van den tegenstander door wat men daarin het meest verwerpelijk vindt. De meer of minder aangename associaties, die de hoorder bij het vernemen van die namen ondervindt, doen dan de rest en zoo kan een goed

gekozen naam aan een der twee zienswijzen in den wedloop om de instemming van den hoorder al een aanzienlijken voorsprong verschaffen.

Om mij niet aan een dergelijke captatio benevolentiae schuldig te maken, heb ik als benaming van het door mij te verdedigen standpunt, die tevens den titel van mijn voordracht vormt, een term gekozen, die nog niet in de wiskundige vaktaal voorkomt en die dus het voordeel heeft, tot op zekere hoogte associatievrij te zijn. Ik heb daartoe aangeknoopt bij een onderscheiding, die Plato maakt tusschen verschillende vormen van ons weten, namelijk tusschen de *ἐμπειρία*, waarin men op grond van ervaring en herinnering een zekere kennis van feiten bezit en de *ἐπιστήμη*, waarin men bovendien rekenschap kan geven van den onderlingen samenhang dier feiten en dus naast het hoe ook het waarom der dingen weet. En ik zou als te bewijzen stelling willen uitspreken, dat in het middelbaar onderwijs de wiskunde, meer dan tot dusver geschiedt, als *ἐπιστήμη* moet worden behandeld, dat het wiskunde-onderwijs meer dan tot dusver epistemisch moet zijn in dezen zin, dat de leerling op ieder oogenblik in staat moet zijn, zichzelf en anderen rekenschap te geven van de beteekenis van de termen, die hij gebruikt en van de motiveering van de methoden, die hij toepast.

Zulk een algemeene didactische stelling pleegt bij eerste aanhooren weinig indruk te maken; in den regel wil iedereen haar wel aanvaarden, misschien zelfs wel met een zeker schouderophalen over wat vanzelfsprekend schijnt; men moet dan meestal met concrete toepassingen aankomen om de toehoorders zich in voor- en tegenstanders te zien verdeelen. Laat ik u daarom onmiddellijk vast een, naar willekeur gekozen voorbeeld geven van wat ik epistemische en wat ik niet-epistemische behandeling van een wiskundig onderwerp noem.

Ik kies daarvoor een onderwerp, dat in het tegenwoordige wiskunde-onderwijs een vrij belangrijke rol speelt, namelijk de theorie van de geheele rationale functie van den tweeden graad $ax^2 + bx + c$, waarin a, b, c reëele constanten zijn en x een reëele variabele en let daarbij speciaal op vragen als deze, voor welke waarde van x deze functie een extreme waarde bereikt, hoe groot die extreme waarde is, en welke haar aard, maximum of minimum.

Deze vraag wordt nu in het onderwijs vaak als volgt behandeld:

men schrijft de functie in den vorm $a(x^2 + \frac{b}{a} x) + c$ of $a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, legt op grond hiervan uit, dat de functie een extreem bereikt voor $x = -\frac{b}{2a}$, dat de extreme waarde $-\frac{D}{4a}$ bedraagt (waarin $D = b^2 - 4ac$) en dat het een maximum of een minimum is, al naar gelang a negatief of positief is. Deze resultaten worden in het leerboek dikgedrukt meegedeeld, door den leerling met de afleiding geleerd en wanneer zich nu in een concreet geval een quadratische vorm $-2x^2 + 5x + 7$ voordoet, vindt hij door invullen van de formules, dat het extreem bereikt wordt voor $x = \frac{5}{4}$, dat de extreme waarde $-\frac{25+56}{-8} = \frac{81}{8}$ bedraagt en op grond van het feit, dat de coëfficient van x^2 negatief is, dat dit extreem een maximum is.

Ziehier nu een voorbeeld van wat ik niet-epistemisch wiskunde-onderwijs noem en wat ik als de didactische zonde bij uitnemendheid zou willen betitelen. Het is alles waar, wat er bij de oplossing van het concrete vraagstuk gezegd is; het is, wat Plato noemt, *δόξα ἀληθής*, juiste meening, maar het is *ἄνευ αἰτίας λογισμοῦ*, zonder rekenschap van de reden, en het moet daarom een *ἄλογον πρᾶγμα*, een onredelijk bedrijf, heeten.

Hoe willen nu echter zij, die epistemisch wiskunde-onderwijs voorstaan, deze zelfde kwestie behandelen? Aanvankelijk misschien juist zoo, misschien ook heel anders; dat is een punt, waarop ik terugkom. Maar zeer zeker zullen ze in de concrete toepassing het neerschrijven en invullen van uit het hoofd geleerde formules eenvoudig verbieden en de mededeeling van den leerling, dat er een maximum is, *omdat* de coëfficient van x^2 negatief is, als volkomen nietszeggend verwerpen. Voor hen is de algemeene afleiding slechts een paradigma geweest, een voorbeeld, hoe men redeneeren kan; zij zullen echter eischen, dat er in elk concreet geval dan ook inderdaad geredeneerd wordt en dat er dus in het concrete geval van $-2x^2 + 5x + 7$ ook geschreven wordt $-2(x^2 - \frac{5}{2}x) + 7 = -2(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{81}{8}$ waaruit onmiddellijk kan worden afgelezen, dat voor $x \neq \frac{5}{4}$ de waarde der functie bedraagt $\frac{81}{8}$ — een positief getal, zoodat dus $\frac{81}{8}$ de maximum waarde is, bereikt voor $x = \frac{5}{4}$.

Ziehier een voorbeeld, waarin nog slechts een enkele zijde van het verschil in opvatting, dat ik door de tegenstelling epistemisch-niet-epistemisch heb trachten te omschrijven, tot uiting komt, maar dat u alvast een indruk kan geven van den aard der kwestie en u de overtuiging kan schenken, dat er hier inderdaad een reëel meeningsverschil tusschen twee methoden van wiskunde-onderwijs bestaat.

Voordat ik nu ga trachten, de stelling aannemelijk te maken, dat het wiskunde-onderwijs niet voldoende epistemisch is, wil ik een tegenwerping weerleggen, die altijd wordt aangevoerd, wanneer men een aanmerking maakt op de wijze, waarop een bepaald leervak in den regel wordt onderwezen. Wat weet ge er eigenlijk van, wordt er dan gevraagd, hoe het in het onderwijs toegaat? Er is nooit gelegenheid, lessen van andere docenten bij te wonen, zelden, om de praestaties van leerlingen van verschillende scholen met elkaar te vergelijken. Iedere school vormt, sedert men mét het gemeenschappelijk eindexamen de kostbare gelegenheid tot wederzijdsche toetsing van resultaten en uitwisseling van denkbeelden heeft weggenomen, een volkomen geisoleerd geheel en op elke school is iedere les een hermetisch afgesloten samenkomst van een klasse met een docent, waarin voortreffelijke dingen kunnen worden gedaan of de grootste ongerechtigheden kunnen geschieden, zonder dat daarvan iets anders in de buitenwereld dringt, dan hetgeen men, met het voorbehoud, dat de ervaring hierbij in acht leert nemen, kan opmaken uit wat de leerlingen weten en doen. Hoe komt men onder deze omstandigheden tot het feitenmateriaal, waarop men algemeene oordeelen baseert?

Deze tegenwerping moet zonder voorbehoud worden toegegeven. Het directe feitenmateriaal, waarop men algemeene uitspraken kan laten steunen, is, hoewel nooit geheel ontbrekend, strict genomen, onvoldoende. Maar dat neemt niet weg, dat men in sommige gevallen op grond van indirecte argumenten toch wel degelijk iets kan zeggen over de mate, waarin een bepaalde didactische opvatting in het onderwijs wordt verwezenlijkt.

In het geval, dat ons bezighoudt, de vraag dus, of de wiskunde in voldoende mate epistemisch wordt onderwezen, zijn er zelfs verschillende van zulke indirecte argumenten, die, zooal niet onomstootelijk bewijzen, dan toch zeer aannemelijk maken, dat die vraag ontkennend moet worden beantwoord. Ik noem er vier:

a) de ontwikkeling der wiskunde zelf leidt tot het gevaar van verwaarloozing van het epistemisch element.

b) de leerboeken bevorderen die verwaarloozing.

c) de leerlingen hebben een uitgesproken voorliefde voor niet-epistemisch onderwijs en verleiden daardoor den docent gemakkelijk, het ook te geven.

d) de meest directe conclusies uit het epistemische standpunt ontmoeten vaak zoo heftigen tegenstand van de zijde van docenten in wiskunde, dat men veilig kan concludeeren, dat zij het in hun onderwijs niet zullen toepassen.

Laat ik op elk dezer argumenten een korte toelichting mogen geven.

ad *a)* de historische ontwikkeling der wiskunde wordt gekenmerkt door een wonderlijk dualisme van redelijke bezinning aan den eenen kant en perfectioneering van machinaal toepasbare technische methoden aan den anderen. Ze wil zich steeds bewust zijn van wat ze doet en inzicht hebben in den logischen samenhang van haar uitspraken, maar ze streeft tegelijkertijd naar eenvoudig en gemakkelijk hanteerbare symbolen en algorithmen, die juist de strekking hebben, het mathematische denken uit te schakelen. Men heeft wel eens gezegd, dat de volmaakte wiskundige een rekenmachine zou zijn en inderdaad heeft de moderne hang naar efficientie en rationaliseering de mathesis reeds zoover voortgestuwd in zuiver technische richting, dat zij haar grooten bloei heeft moeten bekoopen met een volkomen isolement in de wereld des geestes en dat haar beoefenaren voortdurende zelftucht noodig hebben, om epistemisch te blijven, d.w.z. zich op ieder oogenblik de heilzame vragen te stellen: hoe ben ik hier beland, waartoe, vanwaar? wat zeg ik eigenlijk en wat doe ik eigenlijk?

ad *b)* dat de leerboeken vaak het epistemisch element helpen verwaarloozen, is heel begrijpelijk. Ze willen uit den aard der zaak graag beknopt en overzichtelijk zijn, belangrijke resultaten duidelijk laten uitkomen en hun redeneeringen zoo algemeen mogelijk houden. Ze drukken dus in den regel op een in het oog springende wijze hun stellingen en formules af en, zoo zij al niet voorschrijven, die stellingen nu maar zonder meer toe te passen en die formules te gebruiken, om er getallen in te substitueeren, dan verleiden ze er toch zeker toe.

ad *c)* van de zijde der leerlingen wordt de veronachtzaming van het epistemisch element in de hand gewerkt door twee oorzaken. Ten eerste hebben ze op de Lagere School het rekenen geleerd als een ἐμπειρία, een vaardigheid, een soort van weten dus, waarvoor Plato de kookkunst als voorbeeld pleegt aan te halen; er is hun geleerd, zoo en zoo te werk te gaan en de tevredenheid van den onderwijzer over de verkregen resultaten heeft hen van de betrouwbaarheid der ontvangen voorschriften overtuigd. Wanneer dan met de intrede in het M.O. voor hen niet een nieuw leven is begonnen, wanneer ze niet dadelijk en zonder al te veel angst voor de continuiteit van den overgang zijn opgeheven tot het epistemische standpunt, is er kans, dat ze de wiskunde op de H.B.S. blijven beoefenen, zooals ze het het rekenen op de L. S. deden. Vooral de algebra blijft voor hen een empeiria en, wanneer men hen over algebraische bewerkingen hoort spreken of hen schriftelijk ziet werken, wordt men telkens weer doordrongen van de actualiteit der gevleugelde woorden, die Descartes in het *Discours de la Méthode* aan de algebra van zijn tijd wijdt, wanneer hij haar noemt *un art confus et obscur qui embarasse l'esprit au lieu d'une science qui le cultive.*

In de tweede plaats is er de natuurlijke neiging, het denkvermogen zoo weinig mogelijk in werking te brengen. Het is gemakkelijker, een formule van buiten te leeren en daar getallen in in te vullen, dan zich een redeneermethode eigen te maken. Men leert die formules, zooals men woordjes in een vreemde taal leert; leerboeken en schoolagenda's geven er lijstjes van: som van een meetkundige reeks, inhoud van een bolsegment, van een bolschijf enz. enz. Natuurlijk moet men oppassen, dat men zich niet vergist, want, als men per ongeluk met de formule $\frac{2}{3}\pi R^2 h$ reageert op den klank bolschijf is het vraagstuk fout. De ongelukkigen meenen te goeder trouw, dat het vak, dat ze voldoende beoefenen, de mathesis is en ze zijn evenzeer overtuigd, dat ze een onvoldoende verdienen, wanneer ze zich in de 1—1 toevoeging van formule en woord vergissen, als ze verontwaardigd zijn, wanneer men aanmerking durft maken op hun δόξα ἀληθής. Het is inderdaad tragikomisch, een niet-epistemisch onderwezen leerling in de handen van een epistemischen docent te zien geraken. „De coëfficient van x^2 is positief, dus de functie heeft een minimum", zegt hij en

hij kan maar niet begrijpen, wat de ander daar toch op aan te merken kan hebben. Hij heeft het toch zoo geleerd en zijn leeraar in het Fransch is toch ook altijd tevreden geweest, wanneer hij le père zei, als in het Nederlandsch de klank vader genoemd werd.

Het verschijnsel, dat ik hier aanroer, de neiging dus van den normalen leerling, om liever zijn formules te gebruiken, dan zijn verstand, vormt wel een van de grootste hinderpalen voor de verwezenlijking van epistemische idealen. Wanneer hij eenmaal in zijn mechanica-boek formules voor de kogelbaan heeft zien staan voor het algemeene geval, dat de beginsnelheid een hoek α met den horizon maakt, zal hij, wanneer in een concreet vraagstuk de beginsnelheid horizontaal is, de algemeene formule opschrijven, daarin α door nul vervangen en daarna trachten zich te herinneren, hoe groot de cosinus van 0^0 eigenlijk is. En als men hem vraagt, na te gaan, of de vorm $x^2 + 2x + 8$ al dan niet van teeken kan wisselen, zal hij antwoorden, dat, daar de discriminant $4—4.8$ negatief blijkt te zijn, de vorm steeds hetzelfde teeken houdt, om vervolgens op grond van het feit, dat de coëfficient van x^2 positief is, te concludeeren, dat dit steeds behouden teeken het positieve is; terwijl hij dit doel toch door even te schrijven $(x + 1)^2 + 7$ redelijker en sneller had kunnen bereiken.

En ten slotte het vierde argument: zooals ik al opmerkte, blijkt eerst bij ontwikkeling van de consequenties van het epistemische standpunt, wie als voorstanders en wie als tegenstanders moeten worden beschouwd. En zoo hebben ook eerst de oppositie, die menig voorstel van de commissie-Beth onder wiskundigen heeft ontmoet en een polemiek over de toepassing der wiskunde in het natuurwetenschappelijk onderwijs, waarover ik straks nader zal spreken, mijzelf de oogen geopend voor de Schibboleth-beteekenis, die aan het epistemisch beginsel eigen is. Ik kan u die beteekenis niet beter demonstreeren, dan door nu tot de ontwikkeling van die consequenties over te gaan, om u zoodoende zelf te laten gewaarworden, hoe u op het beginsel reageert.

Vooraf echter nog een algemeene opmerking, die wellicht tot verheldering zal kunnen bijdragen, omdat ze de methodische kwestie, die ik hier behandel, begrenst ten opzichte van een andere, die gewoonlijk meer de aandacht trekt en waaraan ieder in de eerste plaats denkt, wanneer er sprake is van meeningsverschillen over de didactiek der wiskunde. Ik bedoel hier het algemeene probleem, hoe

men te werk moet gaan, om den leerling in nieuwe gebieden van de wiskunde in te leiden, hoe men hem telkens weer nieuwe begrippen bijbrengt en nieuwe methoden laat aanleeren. Het is het probleem, waarvan de voortgezette studie in Duitschland aanleiding heeft gegeven tot de evolutie van de wiskundige doceermethode vanuit den zuiver mededeelenden en uitleggenden vorm via de heuristische werkwijze, waarin de docent de leerlingen laat medewerken, althans hun de illusie van medewerking geeft, om de verlangde resultaten in gezamenlijk gesprek te bereiken, tot aan het z.g. Arbeitsunterricht, waarin hij hen zooveel mogelijk alles zelf laat vinden, zonder hun gedachtengang ontijdig te storen. Ook in ons land zijn de hierbij optredende kwesties vaak besproken en bestudeerd, zonder dat er echter in verband met het individueele en fragmentarische karakter van didactische beschouwingen en met het ontbreken van een deskundige centrale leiding van ons onderwijs, een algemeen aanvaarde oplossing bereikt is. Het gevolg is dat, wanneer men eens een simultaan overzicht kon nemen van al de wijzen, waarop in ons land in alle middelbare scholen een bepaald onderwerp wordt behandeld, men zeer waarschijnlijk een wonderlijke staalkaart van methoden te zien zou krijgen, die een aanhanger van nieuwere denkbeelden zou omschrijven als varieerend van de meest verouderde tot de allermeest aan moderne psychologische en paedagogische inzichten aangepaste en waarin meer conservatief aangelegde naturen de klassieke, in jaren lange practijk beproefde methoden met leedwezen zouden zien afwisselen door de meest gevaarlijke paedagogische experimenten der jeugdige nieuwlichters.

Ik zal geen moeite doen, om de evolutie, die de mathematische methodiek ook in ons land — waar de molens der goden wel extra langzaam malen — op dit punt ondergaat, op een meer objectieve wijze te omschrijven, omdat ik den geheelen kring van problemen, die hierbij aan de orde komen, alleen vermeld, om vast te stellen, dat ik er vanavond niet over zal spreken. Dat is niet een gevolg van gemis aan inzicht in de belangrijkheid daarvan, maar wel van mijn overtuiging, dat er in de didactische discussies wel eens wat al te eenzijdig aandacht is en wordt geschonken aan de kwestie, hoe men den leerling de allereerste maal met een nieuw onderwerp in aanraking brengt, met veronachtzaming van de vraag, hoe men

in den loop der volgende maanden en jaren telkens weer op dat onderwerp zal teruggrijpen en hoe men het zal toepassen.

Laat ik dit weer door een voorbeeld mogen toelichten. Toen ik straks over de theorie van den quadratischen vorm sprak, ben ik uitgegaan van de algemeene algebraische discussie van den vorm $ax^2 + bx + c$, maar ik heb daarmee heelemaal niet willen zeggen, dat de behandeling van het onderwerp in de klasse ook daarmee beginnen moet of zelfs in het algemeen beginnen zal. Misschien heeft de leeraar werkelijk, zonder te zeggen, waarom of waartoe, op zekeren dag de bespreking van dezen vorm aan de orde gesteld en doceerend meegedeeld, hoe men hem behandelen kan. Misschien heeft hij eerst het bijzondere geval ax^2 beschouwd en toen òf zelf getoond òf door de leerlingen laten uitvinden, hoe men het algemeene geval hierop terugbrengt, wat òf zuiver algebraisch gebeurd kan zijn òf op den grondslag van een coördinatentransformatie. Het kan ook zijn, dat hij eerst getallenvoorbeelden heeft behandeld, daar door invulling van waarden voor x graphieken van heeft laten maken, waaraan het bestaan en de aard van het extreem kan worden opgemerkt; waarbij weer allerlei verschillende graden van medewerking van den kant der leerlingen denkbaar zijn. Wellicht is het ook niet zoo gegaan, dat die getallenvoorbeelden maar eenvoudig uit de lucht zijn gevallen; er is misschien wel uitgegaan van ingekleede vraagstukken over meer of minder reëele problemen uit het z.g. dagelijksche leven, waardoor men — niet steeds met evenveel succes — de belangstelling van den leerling hoopt te kunnen prikkelen. Kortom er is een groote verscheidenheid van mogelijkheden, maar de keuze, die iemand eruit doet, zal met het al of niet epistemisch karakter van zijn onderwijs niet onmiddellijk samenhangen. Het is denkbaar, dat een goed docent van den ouden stempel, die er niet tegen opzag, te doen, wat in het oog van vele moderne didactici een doodzonde is, nl. een nieuw onderwerp in te leiden met „ik ga spreken over ...." en dan het meteen maar even heelemaal uit te leggen, zuiver epistemisch les heeft gegeven en het is, hoewel niet waarschijnlijk, toch ook niet uitgesloten, dat een aanhanger van Arbeitsunterricht zoo veel voelt voor de technische efficientie der mathematische methoden, dat hij de epistemische beginselen met voeten treedt.

Want die beginselen betreffen nu eenmaal niet zoozeer de wijze, waarop iemand iets voor de eerste maal leert, dan wel die, waarop

hij het geleerde verwerkt en toepast. Zij eischen, dat het wiskunde-onderwijs zich zal onthouden van een werkwijze, waarbij resultaten, in algemeenen vorm afgeleid, in concrete gevallen machinaal worden toegepast, waarbij stellingen worden gebruikt, zonder dat men zich bewust is van de wijze, waarop zij met de grondslagen van het systeem samenhangen, waarbij woorden worden gebezigd, zonder het vermogen, helder het begrip te definieeren, dat zij aanduiden en zonder dat in gedachten de genesis van dat begrip wordt overzien. Tegen dit beginsel kan worden gezondigd zoowel binnen als buiten de muren van elke inleidingsmethodiek.

Hiermede is nu, geloof ik, wel zuiver het pad afgebakend, dat wij vanavond te behandelen zullen hebben en ik kan u dus nu uitnoodigen tot een rondgang door de traditioneele schoolwiskunde, om hier en daar eens na te gaan, in hoeverre het epistemisch beginsel toepassing kan vinden. Uit den aard der zaak spreek ik daarbij voornamelijk over die gebieden, waar het naar mijn meening nog niet voldoende tot zijn recht komt.

Dat is in de eerste plaats het geval bij het onderwijs in rekenkunde in klasse I. U weet wellicht, hoe de situatie is: men neemt aan, daarbij de oogen hardnekkig sluitend voor de realiteit, dat de leerlingen bij hun intrede op de H.B.S. de hoofdbewerkingen met geheele getallen en breuken kennen en het programma in rekenkunde schrijft nu voor, dat deze onderwerpen theoretisch zullen worden behandeld. Vaag als het leerplan is, geeft het niet de minste aanduiding, hoe daarbij te werk moet worden gegaan en hoever die theorie zich uit moet strekken. Die omstandigheid, gepaard aan de moeilijkheid, die erin gelegen is, de belangstelling van kinderen van 12 jaar te wekken voor een theoretische beschouwing van wat zij al meenen te kennen, heeft geleid tot een soms ver gaande veronachtzaming van wat toch volgens het epistemisch beginsel een der eerste plichten van het M.O. is: de leerlingen te laten breken met de gewoonte, symbolen te gebruiken en bewerkingen uit te voeren, omdat het hun nu eenmaal zoo geleerd is, zonder zich rekenschap te geven van wat ze eigenlijk doen.

Ik denk hierbij niet eens in de eerste plaats aan wat men gewoonlijk theorie der rekenkunde noemt. Want er is een andere zijde aan het rekenen, die, zooal niet uit mathematisch dan toch zeker uit didactisch oogpunt als meer fundamenteel moet worden beschouwd dan het uitvoeren der hoofdbewerkingen en wel de sym-

boliek, die voor de uitdrukking van getallen dient, het cijferschrift. Het M.O. moet daarom m.i. beginnen met een uitdrukkelijke behandeling van het Indo-Arabische positiesysteem voor het schrijven van getallen. De hierin toegepaste symboliek beduidt immers een van de allerbelangrijkste vondsten, die er ooit op het gebied van de mathematische notatie zijn gedaan en daar die vondst door iedereen, hoever hij ook overigens van de wiskunde afstaat, levenslang wordt toegepast, is het van belang, dat ieder ook eens zal hebben leeren inzien, waaruit het wezen van dat cijfersysteem eigenlijk bestaat. Want nog steeds is de verwondering het begin van alle wijsheid en niets is juist voor onzen tijd, die verwend is door techniek, zoo typeerend als de neiging, de producten van menschelijk vernuft als vanzelfsprekend, dus onverwonderd te aanvaarden. Op het gebied van ons positiesysteem blijkt nu echter bij ontwikkelde niet-wiskundigen, zelfs wanneer men hen overigens in het geheel niet van een onwijsgeerige levenshouding kan betichten, vaak een volkomen gemis aan inzicht in de wezenlijke beteekenis te bestaan, wat zeer waarschijnlijk een direct gevolg is van de wijze, waarop men vroeger op school (waar toch onze denkbeelden over de wetenschappen, die we later niet zelfstandig beoefenen, voor een groot deel worden gevormd) verzuimd heeft, hen hierover te leeren nadenken. Als typeerend voorbeeld vermeld ik een recente uitlating van een bekend Nederlandsch psychotechnicus in een verhandeling, die nota bene over de psychologie van het rekenen gaat. Ik lees daar het volgende: „het rekenen is nu niets anders dan een zeer vernuftig geconstrueerde methode van efficient tellen. Het tientallig stelsel alleen al met zijn tijdsbesparing (vergelijk MMMMDCCCLXXXVIII en 4888) en elasticiteit plaatst het rekenapparaat naast het alphabet als het geniaalste instrument, door den menschelijken geest bedacht."

In deze passage wordt dus het essentieele van ons cijferstelsel gezocht in het tientallige karakter van ons getallensysteem, waarin het echter heelemaal niet gelegen is. Tientallig toch zijn, op zeer weinige uitzonderingen na, alle tot volledige ontwikkeling gekomen getalsystemen geweest, wat Aristoteles al terecht in verband brengt met het feit, dat wij tien vingers hebben, maar voor de symbolische weergave van de getallen uit het decimale systeem zijn allerlei methoden in gebruik geweest, waarvan de Romeinsche inderdaad heel omslachtig was, maar de Grieksche, die 4888 schreef als *δωπϑ*

even sterk tijdbesparend als de Indo-Arabische en toch daarvan toto genere verschillend. Het essentieele van het symbool 4888 zit dus heelemaal niet in het decimale van het getallenstelsel, maar in de gedachte, de cijfers 0, 1 . . . 9 verschillende waarden te laten aangeven al naar de plaats, die ze innemen, in het positioneele dus. Tusschen positieschrijfwijze en decimaal systeem bestaat echter geen enkel redelijk verband. Het Sumerische getalstelsel is voor een belangrijk deel sexagesimaal geweest en heeft zich toch tot op zekere hoogte van de positieschrijfwijze bediend en men kan het getal 4888 evengoed positioneel schrijven als 1001100011000, wanneer men het duale stelsel gebruikt en dan is het heelemaal niet kort meer.

Dit zijn nu alles dingen, waarop in epistemisch wiskunde-onderwijs van het begin af de aandacht moet worden gevestigd in overeenstemming met het beginsel, dat men zich rekenschap moet geven van wat men doet, als men een symbool hanteert. Het zal u direct in beginsel duidelijk zijn, hoe dat zou kunnen geschieden: behandeling van verschillende historisch belangrijke cijferstelsels, b.v. Sumerisch, Grieksch, Romeinsch, Chineesch en Indo-Arabisch; overbrengen van getalsymbolen uit het eene in het andere systeem; en vooral: oefening in positioneel schrijven van getallen in andere talstelsels dan het decimale. Ik ben natuurlijk bekend met al de spottende en hoonende opmerkingen, waartoe dergelijke voorstellen aanleiding plegen te geven: waartoe, zoo vraagt men, de kinderen lastig te vallen met de manier, waarop men in de grijze oudheid, 2000 jaar voor Chr., in het Tweestroomenland of in Egypte getallen schreef en met de moeilijke alphabetische notatie van de Grieken? (Romeinsche cijfers kunnen er nog wel mee door, omdat ze wel eens op gebouwen staan). Waartoe weer die talstelsels in het leven terug te roepen, die nooit door iemand practisch worden gebruikt? Of, in een anderen toonaard: wat een overbodige geleerdheid, om over positioneel karakter van ons cijfersysteem te gaan spreken; ieder weet toch wel, hoe hij getallen schrijven moet en ieder ander begrijpt het toch! Waartoe zoo zwaarwichtig?

Dat zijn nu allemaal typisch niet-epistemische reacties, die echter bij aandachtige beschouwing nu niet zulk een heel sterke redelijke basis blijken te bezitten. Want, wat die grijze oudheid betreft, als men er niet tegen opziet, kinderen bezig te houden met oorlogen, die toen werden gevoerd en koningen, die elkaar toen opvolgden,

is het niet zoo heel erg gemotiveerd, alle contact met het denken van diezelfde perioden bij voorbaat te willen uitschakelen. Vooral, omdat dat denken een vrij wat meer blijvenden invloed op onze cultuur heeft uitgeoefend, dan de oorlogen en de staatkunde hebben gedaan. Leeft b.v. niet het Sumerische getalstelsel voort in onze indeeling van den cirkel en van het uur en verklaart niet het Grieksche alphabetische systeem, waarin de letters als cijfers werden gebruikt en dus niet meer voor algemeene getalsymbolen konden dienen, mede de sterke vertraging, die de historische ontwikkeling der algebra ten opzichte van die der meetkunde vertoont en daarmee menigen opvallenden trek uit de tegenwoordige schoolwiskunde?

En dan die z.g. geleerdheid! Dat woord vormt, met de passende intonatie uitgesproken, het meest gebruikelijke en meest zinledige argument tegen ieder voorstel, het onderwijs in wiskunde te willen hervormen in epistemischen zin. Men meent maar al te vaak, dat iemand, die zich zelf bewust tracht te zijn van wat hij doet en zegt en die diezelfde gewoonte ook bij zijn leerlingen tracht aan te kweeken, noodzakelijk over hun hoofden heen zal staan praten en dat men bepaald slecht moet denken en slordig moet spreken, om bevattelijk te kunnen zijn. Maar zoo is het niet. Men moet echter den moed hebben, om, waar men een gedachtelooze toepassing van een technisch hulpmiddel aantreft, de zalige rust, waarin het denken daarbij verkeert, te verstoren en men moet bereid zijn, den schijn op zich te laden, dat men eenvoudige dingen moeilijk maakt, wanneer men zelf weet, dat men niets anders doet, dan de illusie van het kennen door het ware inzicht vervangen.

En daarvoor zal men in het geval, dat ons bezighoudt, de talstelsels niet kunnen missen. Ik beschouw het inderdaad als een typisch symptoom van de ontaarding van ons wiskunde-onderwijs, dat aan dit onderwerp zoo weinig aandacht meer wordt besteed. En ik kan me niet voorstellen, dat de psycholoog, dien ik straks citeerde, zijn uitspraak zou hebben gedaan, als hij in zijn jeugd eens duaal had leeren rekenen. Vooral het werken met het duale stelsel pleegt namelijk als een soort openbaring over het wezen van het positiesysteem te worden gevoeld en het rekenen in dit stelsel verdiept sterk het inzicht in de gewone, zonder eenig nadenken uitgevoerde hoofdbewerkingen volgens de gewone notatie. Eerst is er de wonderlijke gewaarwording, dat men alle getallen

kan schrijven met behulp van geen andere symbolen dan 0 en 1, een feit, dat b.v. Leibniz zoo imponeerde, dat hij er een symbool in zag voor de schepping der wereld door God (1) uit niets (0). En dan ineens de verrassing, dat men twee getallen met elkaar kan vermenigvuldigen zonder andere tafels te kennen dan 0.0 = 0; 0.1 = 0; 1.0 = 0; 1.1 = 1. Dat wekt dan weer het besef, dat men bij het gewone vermenigvuldigen honderd van dergelijke resultaten van buiten moet kennen, iets, wat niet-wiskundigen in het geheel niet plegen te beseffen en wat ook wiskundigen wel eens niet bedenken, wanneer zij b.v. het Aegyptische vermenigvuldigen, waarin de vermenigvuldiger duaal wordt ontwikkeld en waarin men dus geen andere bewerkingen heeft uit te voeren dan verdubbelen en optellen, onbeholpen noemen of meenen, dat dit eigenlijk geen vermenigvuldigen is.

In onmiddellijke aansluiting aan de positioneele schrijfwijze van geheele getallen zou die der breuken kunnen worden behandeld, die men in den regel, niet zeer logisch, als tiendeelige van gewone onderscheidt. Hierbij doet zich namelijk een soortgelijk misverstand voor als bij de schrijfwijze van geheele getallen; nl. het gemis aan inzicht dat het ook hier niet het gebruik van het getal tien is, waarop het aankomt, maar het positioneele karakter der schrijfwijze. Men zou dan ook beter doen van breuken in positieschrijfwijze te spreken en dit begrip te oefenen in andere talstelsels (waarin men nu van *g*-deelige breuken pleegt te spreken, opnieuw den indruk wekkend, dat dit een bepaald soort breuken zou zijn) met name in het sexagesimale, waar het voorkomen van den priemfactor 3 naast 2 en 5 in de basis van het stelsel reeds aan de Sumeriers een gebruik van deze breuk-symboliek heeft mogelijk gemaakt, dat veel minder dan bij ons belemmerd werd door het optreden van repeteerende breuken.

Er zou over dit onderwerp nog veel te zeggen zijn. Ik laat het echter verder rusten, om een andere toepassing van het epistemisch beginsel aan de orde te stellen. Laat het u niet bevreemden, dat ik deze opnieuw ontleen aan het onderwijs in rekenen in de eerste klasse. Ik doe dat met een dubbel opzet, nl. vooreerst, om goed te laten uitkomen, hoe dat beginsel van den eersten dag van het M.O. af kan en moet worden toegepast en vervolgens, omdat van het welslagen van die eerste toepassingen de mogelijkheid,

het ook later consequent door te voeren, in hooge mate afhankelijk is.

Het is dan volgens de hier verdedigde opvatting volstrekt noodzakelijk, dat in de eerste klasse de hoofdbewerkingen der rekenkunde voor natuurlijke getallen zorgvuldig worden bekeken en dat de resultaten van dat onderzoek in enkele behoorlijk geformuleerde regels worden vastgelegd. Men zal dus, om het allereenvoudigste voorbeeld te noemen, de optelling moeten definieeren, op de onbeperkte uitvoerbaarheid in het systeem der natuurlijke getallen moeten wijzen en de eigenschappen van commutativiteit en associativiteit moeten behandelen. Hoe men dat doen wil, laat ik weer in het midden. Er zijn verschillende officieele wegen voor en nog veel meer officieuse en ik zou er hier, evenmin als elders in de wiskunde, voor voelen, methodische voorschriften van eenigszins bindend karakter vastgelegd te zien. Een wiskunde-docent kan misschien een overtuigende en verhelderende werking uitoefenen met behulp van voorbeelden, modellen, vergelijkingen, toestellen, redeneeringen, die hij in een leerboek niet zou kunnen of willen afdrukken en die een anders geaarde docent niet van hem zou kunnen overnemen; dat hangt samen met zijn persoonlijkheid en het hoort thuis in de intimiteit van de les. Maar het resultaat moet het daglicht kunnen zien en wanneer de leerling ten slotte niet in staat is, de verworven inzichten klaar en duidelijk in woorden uit te spreken, is het doel der epistemische richting nog niet bereikt. De bekende verontschuldiging: „ik weet het wel, maar ik kan het niet zeggen", wordt door de voorstanders dier richting niet aanvaard. Volgens hen kan men niet iets helder denken zonder het zuiver te zeggen en dat beginsel willen ze in het wiskunde-onderwijs in de allereerste plaats in practijk brengen.

Dezelfde opmerkingen gelden natuurlijk ook voor de andere hoofdbewerkingen, waarbij het dan vooral van belang zal zijn, telkens na te gaan, in hoeverre de eigenschappen van commutativiteit, associativiteit en distributiviteit geldig zijn, dus b.v. goed vast te stellen, dat aftrekking en deeling niet commutatief en niet associatief zijn en dat de vermenigvuldiging ten opzichte van de aftrekking wel, maar ten opzichte van de deeling niet distributief is. Bij dit alles behoort natuurlijk ook de invoering van het getal nul, waardoor het stelsel der natuurlijke getallen wordt uitgebreid tot dat der niet negatieve geheele.

De eisch, dat al deze dingen vóór alle andere goed en uitvoerig moeten worden behandeld, heeft, toen wij haar destijds in het leerplan der commissie-Beth stelden, telkens weer op vergaderingen, waar dit leerplan besproken werd, aanleiding gegeven tot een oppositie, waarvan het vooral opviel, dat zij ten deele op spottend verwonderden, ten deele op verontwaardigden toon werd gevoerd. Men kwam natuurlijk weer met het geleerdheidsbezwaar, sprak van het opzettelijk moeilijk maken van eenvoudige zaken, vond de termen associatief, distributief en commutatief te wetenschappelijk en vooral: men vroeg ons verbaasd af, wat we toch bedoelden met de invoering van het getal nul. Erg bezwarend leken mij toen en lijken mij ook nu nog zulke tegenwerpingen niet. Ik moet in het algemeen zeggen, dat ik er niet bang voor ben, in het onderwijs vroeg wetenschappelijke vaktermen in te voeren en dat ik liever heb, dat het vreemde kunsttermen zijn dan woorden, die ook, maar dan in geheel andere beteekenis, in de dagelijksche spreektaal voorkomen en daardoor hevig met associaties zijn besmet, die men in het onderwijs dan telkens weer moet wegwerken, zooals dat het geval is bij termen als arbeid, versnelling, energie. Want ten eerste is het op zich zelf gewenscht, nieuw verworven inzichten en nieuw ingevoerde begrippen onmiddellijk met een vasten, algemeen aanvaarden vakterm aan te duiden en, wanneer dat woord nog niet eerder in den taalvoorraad van den leerling aanwezig was, kan hij er des te eerder toe worden gebracht, zich telkens rekenschap te geven van de beteekenis en steeds door den gulden regel van Pascal te betrachten, dien een epistemisch docent onophoudelijk aan zijn leerlingen zal voorbehouden: *substituer les définitions à la place des définis.*

En de bezwaren tegen de invoering van het getal nul heb ik in het bijzonder nooit begrepen. Men kan het zonder die nul nu eenmaal niet stellen en de invoering ervan is een groote mathematische daad geweest.

Natuurlijk begrijp ik heel goed, wat men er op tegen had, de nul in te voeren. De ware grond was natuurlijk deze, dat men meende, dat dit begrip van nature bestaat, dat het iets zoo elementairs is, en de bewerkingen, die men er mee kan uitvoeren, iets zoo evidents, dat het onzinnig zou zijn, daar uitdrukkelijk over te praten. Vandaar dan ook, dat er gewoonlijk zoo weinig aandacht aan wordt geschonken. Maar hoezeer wreekt zich dat later! Wat

is er al niet een mathematische onzin ten beste gegeven en wat zijn er al niet noodeloos denkbeeldige moeilijkheden geschapen, als gevolg van het feit, dat men niet bedacht — en welke niet-wiskundige bedenkt dit eigenlijk? — dat weliswaar de optelling met nul als een der termen, de vermenigvuldiging met nul als een der factoren in het lichaam der rationale getallen uitvoerbaar zijn, dat men in dat systeem ook nul van een getal kan aftrekken en door een getal kan deelen, maar dat de bewerking deelen door nul noch daarin, noch in een der door uitbreiding van het getalbegrip ontstane getalsystemen gedefinieerd is.

En op dezelfde manier wreekt zich later de verwaarloozing van de exacte formuleering van de wetten der rekenkundige hoofdbewerkingen, zoowel van de grondwetten als van de daaruit zonder gebruikmaking van den aard der elementen van het systeem formeel te deduceeren afgeleide eigenschappen. Wanneer een leerling zich er nooit rekenschap van heeft gegeven, wat een distributieve bewerking is, zal hij bij de invoering van een nieuwe bewerking zich ook niet afvragen, of deze de eigenschap der distributiviteit al dan niet bezit. Hij past die bewerkingen, worteltrekking b.v. of machtsverheffen, of logarithme-nemen, in een soort van half bewusten toestand toe en als hij zich dan, wat hij noemt, vergist, schrijft hij $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\log(a+b) = \log a + \log b$ enz. zooals hij geleerd heeft $c(a+b) = ca + cb$ te schrijven. Tenzij hij nog tijdig bedenkt, dat dit, wat hij noemt, niet „mag". Hoe zal een docent nu op zulke fouten reageeren? Met woede, hoon, ironie, sarcasme, de klassieke opvoedingsmiddelen van zoo menigen wiskunde-leeraar, die al voor zoo tallooze leerlingen de wiskundelessen tot een hel hebben gemaakt en die hun voor hun geheele leven een antipathie kunnen bijbrengen voor een wetenschap, waarmee elk geestelijk belangstellend mensch op de hoogte behoorde te zijn? Ik geloof, dat hij beter zal doen, te vragen, welke eigenschap der uitgevoerde bewerking eigenlijk wordt toegepast om, wanneer het antwoord hierop, zooals begrijpelijk is, uitblijft, den leerling uit te noodigen, de eigenschappen der uitgevoerde bewerking dan nog maar eens op te noemen en zich te overtuigen, dat hij zijn fout heeft gemaakt, doordat hij iets heeft neergeschreven zonder bewuste toepassing van een regel.

Het is dus in het algemeen van de hoogste waarde, dat de leerlingen vroegtijdig worden geoefend in het zuiver formuleeren van

de eigenschappen der algebraische bewerkingen. Men zal er zich niet tevreden mee mogen stellen, wanneer een leerling vlot opschrijft $a^5 . a^7 = a^{12}$, maar men zal hem tevens bij wijze van toelichting moeten laten zeggen, dat het product van twee machten van hetzelfde grondtal een macht van dat grondtal is, waarvan de exponent de som is van de exponenten der factoren. Maar, zult u zeggen, dat staat toch ook, dik gedrukt, in ieder algebraleerboek. Zeer zeker staat het er in, maar het is maar de vraag, of zulke stellingen ook worden geleerd en bewust worden toegepast? En dat gebeurt, naar ik uit ervaring voldoende weet, lang niet algemeen. Maar al te vaak wordt over de z.g. theorie der algebra maar wat vluchtig heengeloopen en wordt veel te gauw overgegaan tot het eindeloos maken van vraagstukken. Men hoopt, dat de leerlingen het al doende wel zullen leeren en men slaagt er inderdaad in, een soort van machinale vaardigheid te ontwikkelen, die een tijd lang den schijn van begrijpen kan wekken, totdat zich ineens een fout voordoet, waarover de niet-epistemische docent (de epistemische maakt zich geen illusies meer) de handen ineen slaat van verbazing en die hij als een staaltje van ongeloofelijke domheid aan anderen zal vertellen.

Meent u nu echter vooral niet, dat ik tevreden zou willen zijn, wanneer maar alle leerlingen de verschillende algebraische eigenschappen en evenzoo in de meetkunde de verschillende stellingen, die in het leerboek behandeld worden, vlot konden opzeggen. Het epistemische standpunt stelt altijd een dubbelen eisch: helderheid van inzicht en nauwkeurigheid van uitdrukking. Bij het neerschrijven van $a^5 . a^7 = a^{12}$ moet niet alleen *gezegd* worden, dat de nieuwe exponent de som der gegeven exponenten is, maar moet ook worden *gevoeld*, dat dit evident is, omdat men, eerst zeven factoren a opschrijvende en daarna nog vijf erbij, in het geheel twaalf factoren a heeft neergeschreven. En natuurlijk zou ik, wanneer er bepaald gekozen zou moeten worden (maar het hoeft niet), aan dit inzicht de voorkeur geven boven het vermogen tot exacte formuleering. Maar wanneer er nu later komt te staan $a^{1/2} . a^{1/3} = a^{5/6}$? Dan is er van één eenvoudig en onmiddellijk inzien van de juistheid van deze betrekking geen sprake meer; dan moet men weten, dat de symboliek der oneigenlijke machten zoo is ingevoerd, dat de verbindingsregels, die voor geheele positieve exponenten waren afgeleid, geldig blijven en dan wordt de noodzaak van een behoor-

lijke formuleering dier regels ineens veel sterker gevoeld. Maar hoe zal men haar geven, wanneer ze niet van het begin af is geoefend?

U zult nu misschien geneigd zijn, een zekere tegenstrijdigheid op te merken tusschen mijn wensch eenerzijds, dat de leerlingen in staat zullen zijn, steeds de regels te noemen, die bij het uitvoeren der opvolgende bewerkingen worden toegepast en mijn afkeer anderzijds voor het van buiten leeren en invullen van formules. Die tegenstrijdigheid verdwijnt echter, wanneer men bedenkt, dat die regels, in hun oorspronkelijke beteekenis althans, slechts een kort overleg behoeven, om evident te zijn, terwijl de formule, die als resultaat van een lange redeneering voor den dag is gekomen, niet op zich zelf kan worden ingezien, wanneer men niet die redeneering geheel of ten deele herhaalt. Een uitspraak als: „de vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de optelling", drukt een inzicht uit; een formule als $-\frac{D}{4a}$ voor de waarde van het extreem van een quadratischen vorm wordt voor een inzicht in de plaats gesteld en verdringt het.

Overigens ben ik altijd gewend geweest, mijn leerlingen op het hart te drukken, dat zij zoo goed als nooit een formule van buiten behoeven te leeren, maar dat er bij het maken van toepassingen geen bezwaar tegen is, wanneer zij ze door langdurig gebruik en op grond van telkens herhaalde afleiding van buiten blijken te kennen of wanneer ze een middel vinden — liefst zelf — om de juistheid ervan in te zien langs een korteren weg dan die der officieele afleiding. De epistemische eisch, dat men zich voortdurend rekenschap moet geven van den oorsprong van de toegepaste stellingen en resultaten, zou namelijk, zooals dat met algemeene principieele gezichtspunten meestal gaat, tot steriliteit voeren, wanneer men absolute consequentie wilde betrachten, in casu, wanneer men voortdurend en onder alle omstandigheden de volledige ontwikkeling ab ovo wilde reconstrueeren. Wanneer een leerling de uitdrukking $\frac{1}{2}ab \,.\, \sin C$ voor de oppervlakte van een driehoek voor zich zelf gemakkelijk onthouden kan, door op te merken, dat zij voor $C = 90^0$ de formule $\frac{1}{2}ab$ voor de oppervlakte van een rechthoekigen driehoek oplevert en voor $C = 0^0$ tot de waarde nul voert, zal ik zijn redeneering niet onderbreken door te eischen, dat hij het bewijs levert, dat de oppervlakte van een driehoek het halve product is van

basis en hoogte; wanneer hij de formule voor cos 2α terwijl hij haar opschrijft, even afleidt uit de op grond van veelvuldig gebruik zeer vertrouwd geworden formule voor cos $(\alpha + \beta)$, zal ik niet verlangen, dat hij die laatste formule voor alle waarden van α en β nog eens bewijst. Wanneer hij echter neerschrijft $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ zal ik verzoeken, dat toch maar liever even uit de uitdrukking voor den cosinus van den dubbelen hoek af te leiden en op machinaal van buiten geleerde regels ter herleiding van uitdrukkingen als cos $(270^0 - \alpha)$ tot een functie van α zal ik maar zeer matig gesteld zijn. Overigens hangt de hierbij te volgen gedragslijn natuurlijk in hooge mate van het individueele geval af. Bij leerlingen met eenige voorliefde voor wiskunde ontwikkelt zich al gauw een zekere vertrouwdheid met allerlei stellingen en formules, die hen in staat stelt, telkens heele stukken van het betoog als het ware over te slaan en in enkele woorden het geheele verloop van een afleiding te schetsen. Zij zullen b.v. na zekeren tijd als oplossing van de vergelijkingen $x + y = \varphi$, $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{p}{q}$ direct neerschrijven $\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{p+q}{p-q}$ en men zal hen dan rustig hun gang kunnen laten gaan, mits men zoo nu en dan eens even informeert naar den gang der afleiding. Zoo laat dus het epistemische standpunt een groote mate van soepelheid toe in het beoordeelen van wiskundig werk, waarin het, zooals bij de meegedeelde goniometrische voorbeelden, hoofdzakelijk aankomt op het vlot hanteeren en combineeren van eigenschappen en betrekkingen, waarin geen diepere mathematische moeilijkheden schuilen; daardoor bestaan er, bij alle principieele overeenstemming, onder de aanhangers van dit standpunt vrij groote individueele meeningsverschillen over den omvang van het formule-apparaat, waarmee men de leerlingen in de goniometrie kennis zal laten maken en over de wijze van invoering daarvan, welke verschillen men ook weer in de vlakke meetkunde terug zal vinden b.v. bij de bekende kwestie, of men ter berekening van lijnstukken in vlakke figuren zal volstaan met de kennis van de stelling van Pythagoras, of dat men ook de daaruit af te leiden stellingen als zoodanig zal behandelen en laten toepassen.

Ik wil nu verder zonder eenige aanspraak op volledigheid,

nog enkele andere punten aanroeren, waarop het epistemisch beginsel in het tegenwoordige wiskunde-onderwijs nog niet steeds voldoende tot zijn recht komt. In de eerste plaats is dan wel te noemen de uitbreiding van het getalbegrip van het natuurlijke tot aan het reëele getal; het zal u bekend zijn, van hoe ontzaglijke beteekenis deze stap voor de historische ontwikkeling der wiskunde is geweest en hoe zij voor een belangrijk deel daardoor de grenzen heeft kunnen overschrijden, die de Grieksche opvattingen over mathematische exactheid aan haar groei hadden gesteld. Gaat het nu eigenlijk aan, over zulk een essentieele zaak in het onderwijs maar luchtigjes heen te loopen en zich ook hier weer tevreden te stellen met de vaardigheid in het hanteeren der nieuwe symbolen zonder nauwkeuriger beschouwing van de grondslagen, waarop het werken daarmee berust. Deze opmerking geldt natuurlijk allereerst de gebroken en negatieve getallen. Van de eerste brengt de leerling van de L. S. een zekere kennis mee, die aanvankelijk gebaseerd is geweest op beschouwingen over het deelen van lichamen in onderling gelijke deelen, maar die al spoedig tot een zuivere empeiria is geworden, en als zoodanig met een oppervlakkig beschouwd ongeloofelijke onnadenkendheid (getuige meeningen als dat $^1/_2 + ^1/_3 = ^1/_5$ zou zijn) kan worden toegepast. En van de negatieve is hem in de eerste klasse met behulp van beschouwingen over schuld en bezit of over gerichte afstanden een soortgelijke kennis bijgebracht.

Wat nu die invoering van gebroken getallen door deeling van lichamen en van negatieve door financieele of kinematische beschouwingen betreft, daar is natuurlijk niets tegen te zeggen; het is echter de vraag, of het H.B.S. onderwijs zich daartoe kan beperken en of het niet noodzakelijk is, dat men, wanneer eenmaal het rekenen in het stelsel der rationale getallen voldoende is geoefend en men zich voldoende heeft overtuigd, dat daaraan een zeker intuitief inzicht ten grondslag ligt, nog eens terugkeert tot de voor de ontwikkeling van het inzicht in de mathematische methode zoo belangrijke kwestie, hoe men de uitbreiding van het systeem der natuurlijke getallen tot dat der rationale op grond van wiskundige definities kan voltrekken.

Dezelfde opmerking geldt natuurlijk in hooge mate voor de invoering van het irrationale getal. Wanneer men eens goed beseffen wil, hoezeer ons wiskunde-onderwijs in epistemisch karakter

te kort schiet, moet men zich eens verdiepen in het contrast tusschen de heftige reactie, die de ontdekking van het irrationale aanvankelijk bij de Grieksche mathematici teweeg heeft gebracht en het volslagen gemis aan emotie waarmee de tegenwoordige H.B.S.-leerling een symbool als $\sqrt{2}$ hanteert. Maar, zult u vragen, wat wilt ge dan? Wilt ge uw leerlingen vervullen met de Pythagoraeische huivering over het onuitsprekelijke, het alle grenzen der rede overschrijdende, dat er in de onderlinge onmeetbaarheid van zijde en diagonaal van een vierkant schuilt? Nu, zoover gaan mijn wenschen niet, maar eenige meerdere verwondering over de onmogelijkheid, in het systeem der rationale getallen, waarin men zich, zoolang men optelt, aftrekt, vermenigvuldigt, deelt en tot een macht met geheelen exponent verheft, onbelemmerd beweegt, een getal te vinden, waarvan twee het vierkant is, zou ik hun toch graag bijbrengen en in ieder geval zou ik hun graag de illusie willen ontnemen, alsof men het probleem der irrationale getallen zou kunnen oplossen, door de in het systeem der rationale getallen onuitvoerbare worteltrekkingen maar als onopgeloste opgaven te laten staan en met die onopgeloste opgaven te gaan rekenen, alsof het getallen waren. Wanneer men epistemisch wiskunde-onderwijs geeft, moet men nu eenmaal voortdurend illusies verstoren; men moet vaak moeilijkheden scheppen, die spontaan niet worden gevoeld en in het bijzonder moet men den waan bestrijden, dat men een ding zou kunnen leeren kennen, door het te benoemen met een woord en voor te stellen door een teeken.

Men zal dus zonder eenigen twijfel een of andere theorie van het irrationale getal in het M.O. moeten invoeren; welke dat zal moeten zijn, in welke klasse zij behandeld zal moeten worden, hoever men er mee zal moeten gaan, dat zijn alles kwesties van practische didactiek, die ik hier niet zal aanroeren. Ik wil alleen als beginsel uitspreken, dat, wanneer de H.B.S. haar leerlingen laat gaan zonder eenig besef van de eigenlijke beteekenis van een symbool als $\sqrt{2}$ of van een bewerking als $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, zij het doel van het wiskunde-onderwijs in epistemischen zin niet bereikt kan achten.

Een andere duidelijke toepassingsmogelijkheid van het epistemisch beginsel is te vinden in de theorie der algebraische vergelijkingen, een onderwerp, dat, volgens de traditioneele methoden behandeld, heel gemakkelijk aanleiding kan geven tot machinaal gereken zonder eenig inzicht in wat men eigenlijk doet. Ik zal over

dit punt, waarover nog kort geleden door J. H. Schogt in het tijdschrift Euclides belangrijke epistemische opmerkingen zijn gemaakt, niet in technische details treden, maar ik wil alleen als een enkel typisch symptoom van den invloed der niet-epistemische methoden even aan de taaiheid herinneren, waarmee zich de dwaze spreekwijze van het z.g. verduisteren van wortels in het onderwijs nog steeds handhaaft. Zooals u bekend zal zijn, werd vroeger algemeen en wordt ook thans nog vaak den leerlingen geleerd, dat, wanneer een vergelijking in een onbekende, wat men noemt deelbaar is door een vorm, die de onbekende bevat, men bij de deeling van de vergelijking door dien vorm, de wortels van de vergelijking, die ontstaat, door dien vorm gelijk aan nul te stellen, verduistert. Over het algemeen slikten en slikken de leerlingen (die gewoonlijk veel te weinig kritisch zijn tegenover wat hun wordt verteld) die wonderlijke redeneering heel gedwee en het kost een epistemisch docent dan later heel wat moeite, hen te doen inzien, dat de spreekwijze „deelen van een vergelijking door een vorm of een getal" zinledig is, omdat een vergelijking een opgave is, die uiteraard niet door iets kan worden gedeeld en hen te doen beseffen, dat wie zegt, dat hij een wortel verduistert, hem niet verduistert, terwijl hij verduisterd wordt door wie vergeet, dat hij hem verduisterd heeft. En ook nadat de totale overbodigheid van een bewerking, die genoemd wordt is naar de fout, die men maakt, als men haar niet uitvoert, is aangetoond, blijft nog lang een nawerking te constateeren van de onredelijke wijze, waarop dit onderwerp vroeger is behandeld, gewoonlijk bestaande in een terugvallen in de fout met den criminalistischen naam.

Het zal u wel duidelijk zijn, dat men het aantal voorbeelden uit de practijk van het wiskunde-onderwijs, waarin men epistemische en niet-epistemische methoden tegenover elkaar kan plaatsen, naar willekeur kan vermeerderen en dat in vakken als mechanica en kosmographie die voorbeelden eveneens voor het grijpen liggen.

Ik ga thans over tot de bespreking van enkele dier principieele consequenties van het epistemische standpunt, waarbij gewoonlijk het meeningsverschil met de tegenstanders het duidelijkst tot uiting komt. In de allereerste plaats komt dan wel voor behandeling in aanmerking de vraag, hoe men in het M.O. moet staan ten opzichte

van het limietbegrip. Om deze kwestie aan een concreet geval te kunnen toelichten, stel ik me voor, dat er sprake is van het begrip som van een oneindige reeks, welk begrip in het algebra-onderwijs in de derde klasse aan de orde pleegt te worden gesteld. De aanhangers der niet-epistemische methode zullen hierbij, naar ik meen, ongeveer als volgt te werk gaan: ze zullen de formule voor de som van n termen eener meetkundige reeks opschrijven $a \frac{1 - r^n}{1 - r}$ voor het geval, dat $r < 1$ en nu iets in dezen trant opmerken, dat, als n onbepaald toeneemt, het getal r^n natuurlijk heel klein wordt, zoodat dit getal op den duur of ten slotte (het gebruik van een dezer twee termen is essentieel), nl. als n oneindig groot wordt, nul wordt. Er blijft dan dus de uitdrukking $\frac{a}{1 - r}$ over en daarmee heeft men het ideale doel bereikt, de formule, waarmee nu verder kan worden gewerkt, d.w.z. waarin men in vraagstukken over oneindige reeksen de gegeven waarden voor a en r kan invullen. Het is natuurlijk mogelijk, dat de wiskunde-docent, die graag zoo wil handelen, een leerboek gebruikt, dat, zooals de meeste veel voorkomende leerboeken van dezen tijd, toch wel min of meer door epistemische beginselen is beinvloed. In dat geval zal hij bij de uitlegging van de formule wel niet zoo summier te werk kunnen gaan; wanneer echter eenmaal die vervelende bladzijde theorie uit het boek is doorgeworsteld, zal hij daar maar niet meer op terug komen; hij zal in het algemeen de z.g. theorie maar een hinderlijke onderbreking vinden van de vraagstukken, waarvan hij alle heil verwacht. Al doende leert men, zal hij zeggen en misschien citeert hij zelfs het verwerpelijke woord, dat de groote d'Alembert heeft uitgesproken tegenover iemand, die zich beklaagde over de moeilijkheden van het begin der differentiaalrekening: „avancez toujours; la foi vous viendra", en dat nog steeds het geliefkoosde motto is van allen, die meenen, dat het aanbeveling verdient, mathematische bewerkingen te leeren uitvoeren, voordat men ze begrijpt en mathematische termen te gebruiken, voordat men weet, wat ze beteekenen.

In volstrekte tegenstelling hiermee meent nu de epistemische richting, dat dit nu juist niet de minste aanbeveling verdient, dat integendeel deze handelwijze de eigenlijke zonde is tegen den heiligen geest der mathesis en dat men maar liever geen wiskunde

moet doceeren, wanneer men er slechts mee beoogt, den leerling te verleiden tot een gedachteloos gebruik van onbegrepen termen en van buiten geleerde formules. Een epistemisch docent zal dus ook bij het onderwerp van de oneindige meetkundige reeks beginnen met zekere alom gebruikelijke weet-illusies te verstoren, door op te merken, dat, wanneer men een meetkundige reeks onbegrensd voortzet, het natuurlijk geen zin heeft, nog van de som van alle termen te spreken, tenzij men dat woord gebruikt, om een nieuw scherp gedefinieerd begrip aan te duiden. Hij zal dan aan getallenvoorbeelden, b.v. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ .... laten zien, dat de som van n termen bij toename van n een afnemend verschil met een vaste waarde, in casu 2, vertoont en de vraag aan de orde stellen, of dit verschil wel b.v. kleiner kan worden dan 10^{-10}, wat in het voorbeeld voor $n > 35$ blijkt te geschieden. Wanneer dan aan verscheidene getallenvoorbeelden dergelijke vragen zijn behandeld en wanneer b.v. ook is nagegaan, dat de som van n termen van de reeks 1, 2, 4 ...... door keuze van n grooter kan worden gemaakt dan een willekeurig groot getal, zal hij de kwestie algemeen algebraisch behandelen en aantoonen, dat de reeks a, ar, ar^2 .... dan en slechts dan het verschijnsel vertoont dat het verschil van de som van n termen en de uitdrukking $\frac{a}{1-r}$ door keuze van n kleiner kan worden gemaakt dan een voorgeschreven waarde ε, wanneer $|r| < 1$. Hij kan dan de vaste waarde de limiet van de som S_n van n termen noemen en meedeelen, dat men die limiet ook wel bij wijze van spreken de som der oneindige reeks noemt, waarbij hij er voortdurend den nadruk op zal leggen, dat men door voortgezette optelling van termen der reeks nooit en te nimmer, niet op den duur en niet ten slotte, het getal zal krijgen, dat men per definitie de som der reeks noemt. In dit onderwerp kan hij nu aanleiding vinden, om in het algemeen over de limiet van een convergente variant a_n te spreken, die hij niet anders zal kunnen definieeren dan als een vast getal a met de eigenschap, dat het verschil $|a - a_n|$ kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven waarde ε door n grooter te nemen dan een van ε afhankelijk getal N. Wanneer hij later vraagstukken over de oneindige reeksen laat maken, zal hij herhaaldelijk — neen, iederen keer — vragen, wat men eigenlijk onder de som van een oneindige reeks verstaat en hij zal, wanneer die som in een numeriek voor-

beeld is bepaald, vaak nog eens laten uitrekenen, hoeveel termen men nemen moet, opdat de som daarvan van de som der reeks minder dan een gegeven getal verschilt of welke fout men maakt, wanneer men de reeks bij een term van gegeven rangnummer afbreekt.

Maar, zult u zeggen, kan dat nu werkelijk door leerlingen van een derde klasse worden verwerkt? Waarop ik antwoord: als het door leerlingen van een derde klasse niet kan worden verwerkt, moet men het in de vierde probeeren; als het daar niet lukt, in de vijfde; en als het ook daar nog te moeilijk blijkt, moet men het onderwerp oneindige meetkundige reeks op de H.B.S. niet behandelen. Maar ik noem het een volkomen dwaasheid, om op grond van de meening, dat het exacte limietbegrip te moeilijk zou zijn voor de H.B.S., een behandelingswijze van onderwerpen, waarin dat begrip optreedt, te bepleiten, waarbij het alleen maar er om te doen is, om, strikt genomen onbewezen formules te vinden ter berekening van strikt genomen ongedefineerde grootheden en waarin alle werk, dat men te doen heeft, bestaat in het invullen van getalwaarden in die formules.

Maar een andere vraag, die ik voorloopig ontkennend wil beantwoorden, is deze: *is* het exacte limietbegrip werkelijk te moeilijk voor het M.O.? Als men dat volhoudt — en het wordt vaak volgehouden — dan zal men toch moeten kunnen zeggen, waar dan de moeilijkheden schuilen. Ik voor mij heb ze bij zorgvuldige behandeling, waarbij men veel getallenvoorbeelden aan de opstelling van het algemeene begrip laat voorafgaan, nooit kunnen vinden en ik kan ook nauwelijks gelooven, dat men, als men het werkelijk wil, er niet in zou slagen, dat onderwerp op de H.B.S. zoo te behandelen, als ik heb geschetst en zooals verschillende goede leerboeken het ook al lang doen. Maar op het willen van den docent komt het aan! Een wiskunde-leeraar, die zelf die geheele ε-terminologie maar een eenigszins hinderlijken omslag vindt en die in zijn binnenste, hoewel hij het niet durft te zeggen, overtuigd is, dat, als men maar lang genoeg doortelt, men ten slotte toch de som van de oneindige reeks even goed bereiken zàl, als Achilleus de schildpad inhaalt of dat het in ieder geval zoo weinig verschillen zal, dat men een kniesoor zou moeten zijn, om zich daaraan te storen, zal het zijn leerlingen inderdaad niet duidelijk kunnen maken; maar

die man had in onzen tijd ook geen leeraar in wiskunde moeten worden; hij hoort thuis in de achttiende eeuw.

U voelt wel, dat uit deze beschouwingen over het limietbegrip een heele reeks van consequenties ten aanzien van andere onderwerpen der schoolwiskunde voortvloeien. Ik noem in de eerste plaats het begrip van de raaklijn, dat men op de H.B.S. de eerste maal noodig heeft bij den cirkel en dat daarna zoowel in algemeenen vorm voorkomt als in concrete toepassing bij parabool en sinusoide. Bij den cirkel zou ik ter besparing van fundeeringsmateriaal de voorkeur geven aan de Euclidische methode, die zonder limietbeschouwingen toe kan, boven de opvatting van de raaklijn in zeker punt als limietstand van een snijlijn door dat punt, wanneer het tweede snijpunt met den cirkel tot het eerste nadert, terwijl natuurlijk een behandelingswijze, die in negentiendeeeuwsche leerboeken nog wel eens voorkwam en waarbij van oneindig dicht bijeen gelegen of van onmiddellijk opvolgende punten werd gesproken, heelemaal niet in aanmerking komt. Zoodra men echter het algemeene raaklijnbegrip aan de orde stelt, zal men de limietopvatting niet kunnen missen en, als dat eenmaal geschied is, lijkt zij mij ook voor kegelsneden om didactische redenen te verkiezen boven de methode, die Apollonios in de Conica toepast. Nu heeft natuurlijk de opvatting van de raaklijn als limietstand van een snijlijn weinig kans op succes in het begrip der leerlingen, wanneer deze definitie niet aan voorbeelden kan worden toegelicht en geoefend. Men komt er zoo vanzelf toe, de limiet te bepalen, waartoe de richtingscoëfficient van een snijlijn door een bepaald punt P eener kromme nadert, wanneer een tweede snijpunt met de kromme tot P nadert, waaruit volgt, dat de invoering van de beginselen der differentiaalrekening een onmiddellijke consequentie van het epistemisch beginsel is.

En hiermee ben ik gekomen tot het wellicht meest omstreden en scherpst aangevallen onderdeel van de plannen tot hervorming van ons middelbaar onderwijs in wiskunde, die dit beginsel heeft voortgebracht: zal men in het M.O. de beginselen der hoogere wiskunde invoeren? Dat is een gevaarlijk chapiter, vooral wanneer er bij de discussie mathematici betrokken zijn, die hooger onderwijs geven; immers de ervaring leert, dat deze er zich in den regel tegen verklaren. Sommigen van hen zullen dat zakelijk doen, met erkenning van de waarde der aangevoerde argumenten; anderen

hebben er niet veel meer voor over dan een sneer en ze zien er een strafbare hubris van de wiskundeleeraren op H.B.S. en Gymnasium in, zich te willen vergrijpen aan wat als hoogere wiskunde een praerogatief van het hooger onderwijs behoort te blijven. Zij gedragen zich ongeveer juist zoo als de leden der Pythagoraeische secte, die de kennis der mathesis als een geheim bezit bewaarden en die, toen een hunner het gewaagd had, het bestaan van irrationale verhoudingen aan het profanum vulgus te onthullen, het als een gerechte straf der goden beschouwden, dat de onverlaat in een schipbreuk omkwam. Zoo ongeveer doen nu ook de moderne Pythagoraeers: het differentiaal-quotient is een van hun geheimen en het profane H.B.S. vulgus moet daar afblijven.

Maar laat ik nu toch maar onvervaard de vraag stellen: hooren de beginselen der differentiaalrekening thuis in het M.O. of niet? Waarop mijn epistemisch antwoord luidt: zoolang het M.O. begrippen gebruikt, die voor hun exacte omschrijving de terminologie der differentiaalrekening noodig hebben en grootheden berekent, die eenige kennis van haar techniek vereischen, is het een onafwijsbare consequentie uit de epistemische opvatting, dat de beginselen van dit vak in het M.O. moeten worden behandeld. Vandaar dan ook, dat in het leerplan der commissie-Beth die behandeling imperatief wordt voorgeschreven en wel vormt het hiertoe strekkend voorstel een zoo essentieel bestanddeel van het geheele plan, dat men het door schrapping van dit eene onderdeel geheel zou vernietigen.

De argumenten, die ons tot dit voorstel hebben geleid — ze zijn oud en vaak herhaald, maar ik moet ze wel even memoreeren in verband met een scherpen aanval, die er voor ruim een maand van de zijde der Technische Hoogeschool te Delft op gericht is — zijn drieërlei: het eerste noemde ik al: zoolang in het wiskundeonderwijs op de H.B.S. over de raaklijn van een kromme in zeker punt wordt gesproken of over de snelheid van een veranderlijke beweging op zeker oogenblik, zal er ook moeten worden gezegd, wat die twee termen beduiden en zal ook moeten worden behandeld, hoe men de richtingscoëfficient van de raaklijn en de grootte der snelheid bepaalt. Dit zeggende en dit doende doceert men echter — dit is nu eenmaal een feit, dat men kan betreuren, maar waaraan men niets kan veranderen — de beginselen der differentiaalrekening.

Een tweede argument bestaat hierin: de H.B.S. is weliswaar geen direct opleidingsinstituut voor een universitaire studie in wis- en natuurkunde of voor de Technische Hoogeschool, maar ze moet toch, voorzoover dit zonder schade aan het algemeen karakter van haar onderwijs gebeuren kan, rekening houden met de mogelijkheid, dat een klein percentage van haar leerlingen een dier beide studierichtingen zal kiezen. Nu leert de ervaring, dat, waar de overgang van het noodzakelijk schoolsche onderwijs op de H.B.S. tot de zooveel meer zelfstandigheid vereischende doceermethoden van het hooger onderwijs toch altijd al bezwaren voor de meeste studenten oplevert, de aansluiting nog belemmerd wordt, wanneer die overgang gepaard gaat met de eerste kennismaking met de beginselen der infinitesimaalrekening. Bij die eerste kennismaking zijn nu eenmaal altijd opnieuw de denkmoeilijkheden te overwinnen, die de wiskunde in haar historische ontwikkeling ook eerst na een lange periode van zoeken en tasten te boven is gekomen; men moet leeren inzien, hoe de momentane intensiteit van een veranderlijkheid vatbaar kan zijn voor mathematische fixeering; men moet vertrouwd raken met de wonderlijke grootheid differentiaalquotient, waarvoor de snelheid, die betrekking heeft op een ondeelbaar oogenblik en die niettemin niet anders kan worden bepaald dan door beschouwing van een tijdvak, waarvan dat oogenblik begin- of eindpunt is — Zenoon van Elea zag het paradoxe karakter hiervan al in, toen hij zei, dat een voortvliegende pijl in elk punt in rust is — als paradigma dienen kan. Die moeilijkheden nu kunnen naar mijn meening beter worden overwonnen in de schoolsche tucht met haar intens direct contact van leerling en docent en met haar onophoudelijke herhalingen en heruitleggingen dan in de academische vrijheid, en ook daarom hooren de beginselen der infinitesimaalrekening op de middelbare school thuis. Het argument is echter van secundair belang; ik zou het bedoelde voorstel niet willen doen ter wille van a.s. studenten in exacte en technische richtingen, wanneer niet het eerst aangehaalde argument de behandeling van het onderwerp met alle leerlingen eischte.

Van primair belang is nu echter weer het derde motief, dat men gewoonlijk het allerbespottelijkste vindt. Om dit duidelijk te maken, wil ik beginnen met te herinneren aan een merkwaardig maatschappelijk verschijnsel van onzen tijd, nl. het volslagen isolement van de wiskunde in de algemeene geestelijke cultuur. Wanneer men een

intellectueel en geestelijk belangstellend mensch ontmoet, die door zijn studie echter niet met de wiskunde in contact is gebracht, dan kan men herhaaldelijk vaststellen, dat hij haar heelemaal niet op dezelfde wijze beschouwt, als hij het een andere wetenschap zal doen, die hij nooit heeft beoefend, maar waarvoor hij niettemin waardeering en wellicht zelfs een zeker principieel begrip heeft. Na erkend te hebben, dat de wiskunde wel heel veel practisch nut zal hebben als hulpmiddel voor andere vakken, kan hij er verder niets anders meer in zien, dan een wellicht onschadelijk, maar hem in ieder geval niet in het minst interesseerend tijdverdrijf van bepaalde eenigszins abnormaal aangelegde personen en het is hem volmaakt onmogelijk te begrijpen, dat het voor zijn eigen geestelijke ontwikkeling, voor zijn inzicht in wat de menschelijke geest uit eigen kracht vermag voort te brengen en voor zijn dieper begrip van de werkzaamheid, die zijn eigen intellect verricht, van belang zou kunnen zijn, iets van die wiskunde te begrijpen. Dat is een verschijnsel, waarop mathematici niet zelden op weinig sympathieke wijze reageeren. Ze zien er gewoonlijk een bewijs in van de superioriteit van hun wetenschap boven alle andere en ze schrijven het algemeene gemis aan waardeering en begrip voor hun werk toe aan onvoldoende geestelijke qualiteiten van den niet-wiskundige. Maar daarmee nemen ze het verschijnsel niet weg, dat hun vak niet meeleeft in het algemeene cultuurleven van onzen tijd.

Ik vraag mij nu altijd af, of de schuld van dat verschijnsel niet voor een groot deel ligt bij het middelbaar en gymnasiaal onderwijs in wiskunde en of niet een meer epistemische opvatting daarvan er toe zou kunnen medewerken, in den geschetsten toestand, dien men natuurlijk wel met mathematische zelfoverschatting als volmaakt onbelangrijk kan aanvaarden, maar die bij diepere beschouwing toch wel betreurenswaardig moet worden genoemd, verbetering te brengen. Want al die litteratoren, theologen, juristen, philosophen, al die menschen uit de practijk des levens, die zoo zonder eenig begrip over de wiskunde kunnen oordeelen, hebben toch allen in hun jeugd een aantal jaren onderwijs in wiskunde genoten. Het waren dezelfde jaren, waarin zij talen leerden, geschiedenis, natuurwetenschappen, vakken, die zij ten deele later ook misschien nooit meer hebben beoefend, maar waar ze toch met eenig inzicht in doel en methode tegenover staan of waarin de op school opgedane kennis hun misschien nog steeds tot voordeel

strekt. Hoe komt het, dat ze van de wiskunde niets begrijpen en dat de herinnering eraan hen niet zelden met afschuw vervult? Zou het niet hieraan kunnen liggen, dat de wiskunde hun geleerd is als een ἐμπειρία en niet als een ἐπιστήμη, dat in het onderwijs in dit vak het redelijke maar al te vaak is ondergegaan in het technische? Zou men niet ook van uitgesproken A-menschen (om een term te gebruiken, die in verband met de onderscheiding van onze scholen in A- en B-afdeelingen wel zonder toelichting begrijpelijk is) belangstelling in en waardeering voor de wiskunde kunnen verwachten, wanneer men wat minder deed aan oplossing van op zich zelf geheel onbelangrijke problemen, die worden opgegeven om oefening te verwerven in het gebruik van methoden, die ontwikkeld zijn, om er de genoemde problemen mee te kunnen oplossen en wanneer men wat meer nadruk legde op de beteekenis van de wiskunde als vrije schepping van den menschelijken geest en als cultuurhistorische factor.

Wil men echter dat doel bereiken, dan vormen voor oudere leerlingen de beginselen der infinitesimaalrekening wel een der meest voor de hand liggende onderwerpen. Ik heb straks al doen uitkomen, hoe de schepping van dezen tak der wiskunde het menschelijk denkvermogen werkelijk een trede hooger heeft gebracht, omdat het er door geleerd heeft — wat de Grieksche mathesis nooit heeft kunnen bereiken — de veranderlijkheid mathematisch te fixeeren; en ik wil er nu nog even op wijzen, dat de cultuurhistorisch zoo uiterst belangrijke sterke opbloei der natuurwetenschap in de 17e eeuw, een verschijnsel, dat alleen daarom niet in één adem genoemd wordt met de grootste geestelijke bewegingen, die de wereldgeschiedenis kent, omdat het eigenlijk nooit met een duidelijken en pakkenden naam is benoemd, in de allereerste plaats mogelijk is gemaakt door de ontwikkeling der wiskunde tot wetenschap van het veranderlijke.

Door dergelijke zaken aan de orde te stellen en behoorlijk te behandelen, zou het wiskunde-onderwijs op H.B.S. en Gymnasium er ongetwijfeld toe kunnen bijdragen, dat bij een volgende generatie van intellectueelen betere denkbeelden zouden bestaan over het wezen der mathesis en over haar algemeen-geestelijke beteekenis.

Ik heb deze drie argumenten gedurende ruim tien jaar van alle kanten kritisch bekeken en ze in particuliere gesprekken en openbare discussies tegen alle mogelijke aanvallen en bedenkingen ver-

dedigd en ik ben daarbij tot de dubbele conclusie gekomen, dat ik ze volgens mijn eigen inzicht onvoorwaardelijk als juist moet blijven erkennen en dat ze door de meerderheid der wiskundigen in ons land als onhoudbaar of zelfs als dwaas worden verworpen.

Ruim een maand geleden — om een recent voorbeeld te noemen — heeft nog de Rector Magnificus der Technische Hoogeschool, Prof. Rutgers, in de rede, die hij op den Dies Natalis heeft gehouden over ons middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs een uitvoerige bestrijding gegeven van het voorstel der commissie-Beth, om op de H.B.S. de beginselen der differentiaalrekening in te voeren en ik heb alle aanleiding, om te vermoeden, dat het niet alleen een persoonlijke meening was, die hij daarbij tot uiting heeft gebracht. Dat die bestrijding erg diep ging, kan ik niet zeggen. Het argument, dat ik straks als derde heb aangevoerd en dat men kort het cultuurhistorische motief zou kunnen noemen, is door den hooggeleerden spreker met het enkele woord reclamemakerij afgehandeld. En overigens is de invoering van de beginselen der infinitesimaalrekening op de H.B.S. hoofdzakelijk afgewezen op grond van de overweging, dat daardoor de ontwikkeling van de technische vaardigheid der leerlingen in wiskundig werk, volgens den Delftschen Rector de ware toetssteen van den wiskundigen aanleg, in het gedrang zou komen.

Het woord technisch schijnt in Delft wel een sterken tooverklank te hebben, dat men de eischen die men er aan het wiskunde-onderwijs van de H.B.S. stelt, juist door dit woord het best meent te kunnen formuleeren. Want als men nader onderzoekt, wat er eigenlijk onder die technische vaardigheid wordt verstaan, blijkt het begrip, dat er door wordt aangeduid, nu heelemaal niet zoo bekoorlijk te zijn. Ik vrees zelfs, dat de door Prof. Rutgers aanbevolen methode van wiskunde-onderwijs in vele opzichten bedenkelijk dicht nadert tot wat ik als de niet-epistemische methode heb betiteld en als zoodanig heb verworpen. Dat is weliswaar niet in overeenstemming met het Platonische spraakgebruik, waarin, als er over wiskunde wordt gesproken, *τέχνη* als vrijwel synoniem met *ἐπιστήμη* wordt gebruikt (destijds terecht, omdat de techniek het ware inzicht toen nog impliceerde), maar in onzen tijd zal wel niemand bezwaar maken, om technisch en epistemisch als tegenstellingen te aanvaarden.

Men schijnt dus inderdaad in Delft als meest ideale voorberei-

ding tot het daar te geven onderwijs in wiskunde een H.B.S.-opleiding te beschouwen, waarin de leerling meer getraind is in het vlot hanteeren van zekere mathematische rekenwijzen dan geoefend, zich rekenschap te geven van wat hij zegt en doet. Men hecht er blijkbaar meer aan vaardigheid in het herleiden van gecompliceerde wortelvormen, in het uitvoeren van logarithmische berekeningen, in het oplossen van gekunstelde exponentieele en logarithmische vergelijkingen, dan aan inzicht in den aard van het irrationale getal, aan kennis van de definitie van limiet en aan begrip van de ware beteekenis van den term „snelheid van een veranderlijke beweging op zeker oogenblik."

Ik zal het als buitenstaander niet wagen, de gegrondheid van dit verlangen te betwisten, maar ik kan niet nalaten, mij er eenigszins over te verwonderen. Men kan immers niet aannemen, dat men in Delft de methoden van het niet-epistemische wiskunde-onderwijs van de H.B.S. eenvoudig zou willen voortzetten en dat men ook daar techniek boven inzicht zou stellen. Maar moet dan de intrede in de Delftsche collegezalen meteen een bekeering beteekenen tot een nieuwe opvatting van het wiskundig denken en hoopt men, dat die bekeering des te doeltreffender zal zijn, naarmate er een diepere staat van zonde aan is voorafgegaan?

U kunt aan dit voorbeeld zien, hoeveel tegenstand de epistemische richting van wiskunde-onderwijs in ons land nog ondervindt en daaruit opmaken, dat men inderdaad nog geen uilen naar Athene draagt, wanneer men haar verdedigt. Persoonlijk heb ik dienzelfden tegenstand natuurlijk al veel vaker ervaren, waarbij dan soms echter bleek, dat er van een eigenlijke verdediging heelemaal nog geen sprake kon zijn, omdat het zelfs nog niet tot den tegenstander was doorgedrongen, wat de epistemische opvatting van wiskunde-onderwijs nu eigenlijk precies inhield. Hoe weinig dat soms wordt beseft, is mij nooit duidelijker geworden dan in den loop van een tamelijke heftige gedachtenwisseling, die in het jaar 1929 is gevoerd over de kwestie, of het leervak Mechanica op de H.B.S. als zelfstandig vak moest blijven bestaan of dat het moest worden ingelijfd bij de Natuurkunde. De Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging had in een adres aan den Minister het laatste bepleit, terwijl er van epistemisch-wiskundige zijde bezwaren tegen waren aangevoerd. De toenmalige minister van onderwijs heeft de kwestie werkelijk op zeer grondige, zij het dan ook niet geheel doeltreffende

wijze behandeld; bij gemis aan een deskundig orgaan, om over onderwijszaken te beslissen, heeft hij alle besturen en commissies bijeengeroepen, die iets met het vraagstuk hadden uit te staan met het gevolg, dat er in het ministerie van Onderwijs een vergadering is belegd, waaraan met het college van Inspecteurs meer dan 30 vertegenwoordigers van Hooger en Middelbaar Onderwijs deelnamen en die dan ook zonder resultaat is gebleven. Later heeft de Onderwijsraad zich nog eens een geheelen dag door twee verdedigers van de respectieve standpunten laten voorlichten en ten slotte is de mechanica als zelfstandig leervak gehandhaafd.

Dat laatste doet hier nu niet zooveel ter zake; ik vermeld het geheele geval hoofdzakelijk, om de wonderlijke emotie te memoreeren, die de verdedigers van het standpunt der epistemische mathematici op de vergadering heeft vervuld, toen zij zich door de aanwezige physici ineens hoorden uitmaken voor een soort van formule-slaven, die den leerlingen geen inzicht in de verschijnselen wilden bijbrengen, maar hen zoo snel mogelijk in staat wilden stellen, vraagstukken op te lossen en toen anderen hun een neiging tot onmatige uitbreiding van het mechanica-onderwijs in de richting der abstracte axiomatica verweten.

Dat deze twee verwijten naar mijn meening beide even ongemotiveerd waren, zal ik na al het voorafgaande wel nauwelijks meer behoeven te zeggen. Dat misverstand was in het eerste geval ten duidelijkste een gevolg van onwil, om onze redeneeringen te volgen en zich op ons standpunt te verplaatsen of misschien ook wel van de in discussies vaak met voordeel toegepaste methode, naar de argumenten van den tegenstander niet te luisteren. Ernstiger stond en staat het nog met het tweede bezwaar, dat ook bij andere gelegenheden, o.a. in een oordeel van de Amsterdamsche Faculteit van Wis- en Natuurkunde over epistemische voorstellen, is aangevoerd. Men kan inderdaad, wanneer men steeds weer aandringt op volledige vermelding van alle toegepaste stellingen en correcte bepaling van alle gebruikte begrippen, den schijn op zich laden, alsof men de analyse van het betoog en de uitdrukkingswijze zou willen voortzetten tot aan die uiterste grenzen, waar de niet meer nader te ontleden uitspraken over niet meer nader te bepalen termen worden gedaan en alsof men heelemaal vergeet, dat men in M.O. met beginnelingen in de mathesis te maken heeft, wier leeftijd hen allerminst geschikt maakt voor een overlading met abstract-

logische uiteenzettingen. Dat men echter, het epistemische standpunt verdedigend, zich aan een zoo diepgaande miskenning van elementaire psychologische en paedagogische inzichten schuldig zou maken, is echter ook niet meer dan een schijn. Daarvoor is het standpunt te zeer in de practijk van het onderwijs, die een zoodanige miskenning niet zou verdragen, gegroeid en beproefd.

Maar, zult u wellicht zeggen: Soviel Schein, soviel Hinweisung auf Sein; en wanneer een zoo tot oordeelen bevoegd college als de Amsterdamsche faculteit van wis- en natuurkunde aan de epistemische richting een neiging tot abstracte axiomatica verwijt, dan zal de epistemische richting het er zeker ook wel naar gemaakt hebben.

En toch lijkt het verwijt mij onbillijk. Maar.... men moet het er eerst goed over eens zijn, wat men onder een axioma wil verstaan en op dit woord rust de vloek van Babel.

Die vloek openbaart zich allereerst hierin, dat het woord vaak gebruikt wordt in gevallen, waarin het heelemaal niet van toepassing is. Wanneer in den strijd over de vraag, of mechanica op de H.B.S. meer op mathematische of meer op experimenteele basis moest worden gedoceerd, de discussie over de behandeling van het begrip versnelling liep — en dat deed ze onvermijdelijk na zeer korten tijd —, wanneer men dan wees op de groote moeilijkheid, om dat begrip op de H.B.S. behoorlijk te definieeren en daarbij de vrees uitsprak, dat de experimenteele methode, welker voorstanders wel eens de neiging hebben, zien met begrijpen te verwarren en een correcte formuleering des te meer overbodig te achten, naarmate zij een intensiever intuitief inzicht kunnen opwekken, dat begrip niet voldoende tot zijn recht zou kunnen brengen, dan kreeg men te hooren, dat men te axiomatisch te werk wilde gaan, terwijl toch de versnelling zich geheel expliciet op grond van reeds ingevoerde begrippen laat bepalen.

Maar in de tweede plaats verwart men niet zelden de actueel-mathematische beteekenis van het woord axioma met de historische en meent men, dat, wanneer er van epistemische zijde wordt aanbevolen, in het wiskunde-onderwijs meer axiomata in te voeren, daarmee een vervorming van dat onderwijs in formalistische richting wordt beoogd. Die meening is echter onjuist. De formalistische opbouw van een bepaalden tak der wiskunde, b.v. der Euclidische meetkunde, laat zich immers in groote lijnen zoo omschrijven, dat

men de opgestelde axiomata beschouwt als onbewezen uitspraken over ongedefinieerde dingen, die door die axiomata pas een beteekenis krijgen en dat men nu hieruit een systeem van zinnen en woorden afleidt, die zich weliswaar aanschouwelijk in ruimtelijke voorstellingen laten interpreteeren, maar die ook zonder zoodanige interpretatie een zelfstandig bestaan voeren. Woorden als punt, lijn, vlak, tusschen, enz. zijn dus klanken, die niets anders beteekenen dan en waarbij men zich ook niets anders behoeft te denken dan wat er in de axiomata van gezegd wordt en wanneer men die woorden door andere, nieuwgesmede en nog niet met een beteekenis belaste vervangt, moet de opbouw van het systeem evengoed kunnen plaats hebben; alleen vervalt dan de steun, die een aanschouwelijke interpretatie kan geven.

Het behoeft nu wel geen betoog, dat niemand er aan denken zal, om op een H.B.S. in dezen zin van het woord axiomatica te bedrijven. Maar men moet ook niet vergeten, dat deze zin van het woord nog niet ouder is dan een halve eeuw en dat men daarvoor toch ook altijd al, zoowel in wiskunde als in mechanica, van axiomata gebruik heeft gemaakt. En wel zoo, dat het woord steeds een onbewezen uitspraak heeft aangeduid, echter niet over leege termen, die hun beteekenis eerst ontleenen aan het axioma-systeem, waarin ze voorkomen, maar over meetkundige en natuurkundige voorstellingen en begrippen, die men reeds tot op zekere hoogte bezat en die men nu logisch wilde ordenen. Men moest dan zekere fundamenteele uitspraken als onbewezen uitgangspunten aannemen en men ging bij de keuze daarvan zoo te werk, dat men zich ten eerste afvroeg, uit welk minimum van beweringen men alle andere stellingen kon deduceeren en ten tweede naging, welke beweringen voldoende aannemelijk waren, om onbewezen als uitgangspunt te kunnen worden aanvaard.

Het verdient nu de aandacht, dat van de twee motieven, die deze keuze bepalen, het eerste steeds verre het tweede heeft overheerscht. Het streven naar een minimum aantal axiomata, naar het leggen dus van een zoo smal mogelijke axiomatische basis van het op te trekken systeem, leidde er toe, de voorwaarde, dat een axioma evident moet zijn, nog wel als noodig maar niet meer als voldoende te beschouwen en dus de vraag: moet dit nog bewezen worden? te vervangen door een andere: kan ik dit nog bewijzen? Tot ca. 1800 toe is aanschouwelijke evidentie echter altijd wel als een essentieel

kenmerk voor een axioma gevoeld en onder niet-mathematici is dit nog steeds de gangbare opvatting; nog vrij algemeen vatten zij een axioma op als de vaststelling van een feit, welks tegendeel noch kan worden waargenomen, noch kan worden voorgesteld en de geestelijke breuk tusschen het algemeen intellectueele publiek en de wiskunde dateert voor een groot deel vanaf het oogenblik, dat met de constructie van een niet-Euclidische meetkunde de geschetste opvatting door de mathematici is verlaten en axioma synoniem met hypothese is geworden.

Hoe staat het nu met de toepassing van axiomata in het middelbaar wiskunde-onderwijs, zooals de epistemische richting die voorstaat? Mij dunkt, dat dit kortweg zoo te omschrijven is, dat het woord axioma in het elementaire wiskunde-onderwijs niet anders kan worden gebruikt dan in de beteekenis, die het voor 1800 bezat, dus in den zin van uitdrukkelijke formuleering van een evidente bewering, maar dat het in die beteekenis veel ruimer moet worden toegepast dan tegenwoordig te doen gebruikelijk is. Laat ik dit weer met enkele voorbeelden mogen toelichten. Wanneer in het wiskunde-onderwijs in de eerste klasse over congruentie van driehoeken wordt gesproken, komt b.v. de stelling voor, dat, wanneer twee zijden en de ingesloten hoek van een driehoek achtereenvolgens congruent zijn met twee zijden en den ingesloten hoek van een anderen driehoek, de derde zijde van den eersten driehoek congruent is met de derde zijde van den tweeden driehoek. Van die stelling wordt dan een schijnbewijs gegeven, waarin de driehoek wordt opgenomen, alsof het een plankje in den vorm van een driehoek was. Dit bewijs heeft nog nooit de overtuiging van de juistheid der stelling geschonken aan iemand, die haar nog niet bezat en het is wiskundig waardeloos. Dergelijke bewijzen nu zijn overbodig, zelfs schadelijk. Het is wiskundig zuiverder en didactisch verkieselijker, de bewering van de congruentie van het derde zijdenpaar als axioma te stellen. Een ander voorbeeld: vele leerboeken bewijzen, dat als een rechte een punt bevat, dat binnen een cirkel ligt, zij den cirkel in twee punten snijdt en ze doen dat met behulp van continuiteitsbeschouwingen, die op andere plaatsen, waar ze evengoed mogelijk zouden zijn, niet zouden worden geduld, maar die hier als deus ex machina dankbaar worden toegelaten. Waarom zal men de bedoelde bewering niet als axioma stellen?

Maar, zult u zeggen, hoever moet men daarmee gaan? Moet de

evidentie, die altijd een noodig kenmerk voor een axioma (in den historischen zin van het woord) geweest is, nu weer tot voldoend kenmerk worden verheven, zoodat men alles als axioma zal moeten formuleeren, wat iedere leerling evident vindt? En moet dus het streven naar smalheid van axiomatische basis het nu weer afleggen tegen het evidentie-motief?

Ik wil er nog even van afzien, deze vraag te beantwoorden, om er eerst den nadruk op te leggen, dat een ruimer gebruik van axiomata in den geschetsten zin van het woord toch wel moeilijk zal kunnen worden uitgelegd als een met alle paedagogische en psychologische inzichten strijdende noodlottige neiging tot abstracte axiomatica in den formalistischen zin van het woord. En toch gebeurt dit meestal. Als men, over elementair wiskunde-onderwijs sprekend, het woord axioma in den mond neemt, is men in het oog van vele paedagogen daardoor alleen al veroordeeld. De formuleering van een axioma wordt gevoeld als wat tegenwoordig graag een misdaad aan de kinderziel wordt genoemd, ook als de opstelling ervan de bedoeling heeft, die kinderziel te behoeden voor de ergernis, die het gedwongen leeren van als overbodig gevoelde bewijzen van evidente beweringen met zich mee pleegt te brengen. Men vergeet dan echter, dat een axioma in den hier bedoelden zin van het woord slechts dient, om uit te spreken en daardoor bewust te maken, wat iedereen intuitief als juist ziet en wat in niet-epistemisch wiskunde-onderwijs òf slechts in schijn wordt bewezen òf zonder uitdrukkelijke formuleering als argument wordt gebruikt.

Het zal u nu ook duidelijk zijn, dat binnen het raam van deze opvatting nog een groote verscheidenheid van methodische gezichtspunten over den omvang van het gebruik van axiomata mogelijk is, die ten gevolge heeft, dat men tot de gezamenlijke aanhangers van de epistemische richting menschen kan rekenen, die bij oppervlakkige beschouwing elkanders antipoden schijnen te zijn. Men kan b.v. van meening zijn, dat in een eerste klasse een deductieve behandeling van de vlakke meetkunde misplaatst is en dat men eerst met behulp van den, een aantal jaren geleden zoo veel omstreden, propaedeutischen cursus het meetkundig inzicht van den leerling, zijn vertrouwdheid als het ware met de ruimte, tot ontwikkeling moet brengen, voordat men aan een logischen opbouw kan beginnen; men kan anderzijds volhouden, dat men vanaf de eerste les axiomata en definities kan formuleeren en daaruit

stellingen kan afleiden, waarbij men nog weer òf van meening kan zijn, dat het aantal axiomata zooveel mogelijk moet worden beperkt òf ook uitspraken als axioma kan toelaten, die weliswaar bewezen kunnen worden, maar waarbij het moeilijk valt, de behoefte tot bewijs bij den leerling op te wekken. Men kan, om het kort uit te drukken, zich een heele scala van opvattingen voorstellen, die tusschen het standpunt van mevr. Ehrenfest en dat van J. H. Schogt als uitersten inliggen en die men toch alle epistemisch zou kunnen noemen.

Persoonlijk zou ik er het meest voor voelen, in de beginstadia van het meetkunde-onderwijs wel vrij spoedig deductief te werk te gaan door stellingen te bewijzen, maar alleen dan, wanneer een bewijsbehoefte òf spontaan optreedt, òf door het stellen van de vraag, hoe het ook zou kunnen zijn, gemakkelijk kan worden gesuggereerd. Ik zou dus m.a.w. in het allereerste begin het bewijs alleen als overtuigingsmiddel willen laten dienen, dat uiteraard alleen wordt aangewend, wanneer er overtuigd moet worden, niet als kriterium ter beoordeeling van de plaats van een stelling in het systeem. Na eenigen tijd wordt het dan al mogelijk en wenschelijk, tot een partieele ordening van stellingen te komen, wat des te minder moeite kost, naarmate die stellingen verder van de basis van het systeem afliggen. Ik zou dan echter het meetkunde-onderwijs niet willen laten eindigen, zonder dat de basis nog eens opnieuw in behandeling is genomen, d.w.z. ik zou de beginselen der vlakke meetkunde in de hoogere klassen, eventueel gelijktijdig met die der stereometrie, nog eens in een correct logisch systeem willen ordenen, waarin dan de axiomata nog wel uitdrukking zouden zijn van meetkundige inzichten, die voor het natuurlijke denken intuitief evident zijn, maar waarin hun aantal zooveel mogelijk zou worden beperkt en het bewijzen uitsluitend als kriterium voor logische ordening zou dienen. Men zou dan b.v. niet meer dwaze toestanden beleven als deze, dat een leerling, die de H.B.S. verlaat, wel ingewikkelde berekeningen over de inhouden van omwentelingslichamen kan maken, maar niet weet, wat het parallel-axioma inhoudt. En men zou bovendien, door erop te wijzen, dat bij de deductieve behandeling van het systeem geen direct beroep meer wordt gedaan op de evidente voorstellingen, die in de axiomata zijn geformuleerd, den leerling gemakkelijk kunnen voorbereiden tot de meer moderne opvatting van axioma, waarin van het kenmerk der evidentie geheel afstand is gedaan.

Ik ben er mij natuurlijk volkomen van bewust, welk een volslagen ommekeer in het wiskunde-onderwijs, vooral der hoogere klassen, de verwerkelijking van dit programma met zich mee zou brengen. De technische vaardigheid, het vermogen, om ingewikkelde berekeningsvraagstukken op te lossen, zou er ongetwijfeld nog meer door in het gedrang komen, maar het inzicht in den waren aard der mathesis zou er aanzienlijk door worden verdiept en . . . . het goed recht der wiskunde, om, in zoo hooge mate als thans geschiedt, beslag te leggen op de denkenergie van leerlingen, die in hun later leven nooit meer met wiskundige problemen in aanraking zullen komen, zou er zeer door worden gesterkt.

Er is langzamerhand een scherp contrast ontstaan tusschen de motieven, die aanvankelijk hebben bewerkt, dat aan de wiskunde een zoo ruime plaats in het systeem der intellectueele opvoeding werd ingeruimd en die, bij principieele behandeling van de vraag naar het recht, dat de wiskunde op die plaats kan doen gelden, nog steeds worden aangevoerd èn, aan den anderen kant, de wijze, waarop practisch het onderwijs in wiskunde wordt gegeven. Die motieven zijn in den grond van de zaak nog steeds dezelfde, die Plato er toe dreven, de wiskunde als onmisbare voorbereiding voor het wetenschappelijk denken in het algemeen te beschouwen en ze zijn kort samen te vatten in de bewering, dat beoefening der wiskunde als episteme een oefening van het denkvermogen beduidt,, waarvan men èn bij alle wetenschapsbeoefening en bij alle gelegenheden, waarin het practische leven eischen aan het denken stelt, voordeel zal kunnen hebben. Wanneer we nu echter aan deze overwegingen de practijk van het tegenwoordige wiskunde-onderwijs toetsen, waarin onder invloed van het verlangen naar ontwikkeling van mathematische techniek het oplossen van vraagstukken een onmatig groote plaats inneemt en waarin het inzicht maar al te vaak te kort komt, dan mogen we ons wel eens afvragen, of de argumenten, die voor wiskunde-onderwijs als middel tot geestelijke vorming worden aangevoerd, eigenlijk nog wel in eenigszins bevredigende mate worden verwezenlijkt en of de lading, waarmee onze scholen jaar in jaar uit de geesten van zoovele jonge menschen belasten, niet vaart onder valsche vlag.

Wat ik de epistemische richting in het wiskunde-onderwijs heb genoemd, is voor mijn gevoel de richting, die er naar streeft, het beschreven contrast tusschen motief en uitwerking op te heffen,

althans het zooveel te verzwakken als onder den sterk mechaniseerenden invloed der moderne mathematische techniek mogelijk is. Een verwezenlijking van dat streven zou, zooals ik al opmerkte, neerkomen op een beperking van den omvang der wiskundige leerstof in het M.O., die velen ongetwijfeld veel te ver zou gaan, maar die in mijn oog gerechtvaardigd zou zijn door de verdieping van principieele inzichten, die ze mogelijk zou maken. Ik vind het persoonlijk nu eenmaal belangrijker, dat iemand heeft leeren inzien, dat de stelling, volgens welke een buitenhoek van een driehoek grooter is dan elke der twee niet-aanliggende binnenhoeken, niet van het parallel-axioma afhangt, zooals bijna alle leerboeken ons willen doen gelooven, dan dat hij planimetrische en stereometrische berekeningen kan uitvoeren, die in herhaalde toepassing en invulling van zekere formules bestaan. Ik hecht er meer waarde aan, dat hij heeft leeren nadenken over de wijze, waarop het getalbegrip gaandeweg is uitgebreid vanaf het natuurlijke getal tot het reëele, dan dat hij in staat is, lange logarithmische berekeningen uit te voeren; en ik vind, dat hij voor zijn geestelijke vorming meer gebaat is met inzicht in het ontstaan van de axiomata van de mechanica van Newton dan met de vaardigheid, om volgens vaste schemata van berekening krachtenstelsels te herleiden en zwaartepunten van samengestelde lichamen te bepalen.

En opnieuw kan ik nu, naar aanleiding van het laatste punt vragen, of men inderdaad het recht heeft, de voorstanders der epistemische richting ook op het gebied der mechanica te beschuldigen van een onmatig streven naar uitbreiding van het onderwijs in de richting der abstracte axiomatica. Men moet natuurlijk toegeven, dat de axiomata van de mechanica van Newton de evidentie missen, die de axiomata van de Euclidische meetkunde voor het onkritische denken kenmerkt; terwijl immers alleen al de mogelijkheid, de laatste in gedachte te ontkennen, een hoogen graad van mathematische scholing vereischt, heeft men het directe tegendeel van wat voor de mechanica van Newton de grondslagen zijn, eeuwenlang met axiomatische zekerheid aangenomen. Deze grondslagen ontleenen hun bestaan dus niet aan een den natuurlijken mensch aangeboren inzicht — dat een constante kracht een eenparig versnelde beweging veroorzaakt, blijft voor hem altijd paradox — maar vrijwel alleen aan de mogelijkheid, dynamische verklaringen te geven voor reeds langs anderen weg bekend geworden kinematische feiten

over val en worp; en eerst bij langdurige toepassing beginnen ze ook eenigszins het karakter van evidente inzichten aan te nemen.

Is nu echter juist dat verschil tusschen den aard der dynamische en dien der geometrische axiomata niet een grond, in het H.B.S.-onderwijs over beide te spreken? Want abstract, in den zin van het contact met de aanschouwing verloren hebbend, zijn ze geen van beide, maar terwijl bij de geometrische axiomata het fundamenteel aanschouwelijke op den voorgrond staat, toonen de dynamische in de eerste plaats duidelijk de logisch ordenende kracht, die aan een axiomasysteem eigen kan zijn en daarmee de waarde van het begrip der axiomatiseering voor de geheele natuurwetenschap.

Ik ben hiermee aan het eind van mijn beschouwingen over epistemisch wiskunde-onderwijs gekomen. Dat die beschouwingen fragmentarisch zijn, is mij geen oogenblik ontgaan, maar voor een volledige uiteenzetting van het epistemisch beginsel zou men een geheelen cursus noodig hebben. Ik hoop er echter in geslaagd te zijn, u ervan te overtuigen, dat dit beginsel inderdaad een reëel richtsnoer voor het wiskunde-onderwijs geven kan, dat het noch triviaal is, noch paradox en dat het, waar men het toepast, zeer beslist een bepaalde richting van handelen aangeeft, waarin echter nog voldoende speelruimte is voor individueele meeningsverschillen.

Persoonlijk ben ik in den loop van 18 jaren wiskunde-onderwijs steeds meer overtuigd geworden, dat de wiskunde slechts dan recht van bestaan heeft als leervak voor alle scholen van middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs, wanneer ze gedoceerd wordt in epistemischen zin. Maar als dit geschiedt, verdient ze ook, zoowel om intellectueele als om moreele redenen een belangrijke plaats in de opvoeding van het jongere geslacht. Want de gewoonte, zich rekenschap te geven van wat men zegt en doet, moet toch wel in iederen staat des levens als heilzaam worden gevoeld. En die gewoonte kan nergens beter worden aangekweekt dan in wiskundelessen, waarin men zich bij alles, wat men zegt en doet, voortdurend de beide vragen leert stellen, waarin het epistemisch beginsel is samen te vatten: wat versta ik er onder; hoe kom ik eraan?

CRITIEK VAN VREDENDUIN'S „LOGICA DER WISKUNDE"

DOOR

E. W. BETH.

In een artikel „De logika der wiskunde", verschenen in de „Annalen der critische philosophie" (3—1933), heeft P. G. J. Vredenduin beschouwingen gegeven over de grondslagen der wiskunde, uitgaande van de critische philosophie.

Het verschijnen van „De Autonomie der Wiskunde" als artikel in „Euclides" (afl. 3) verschaft mij een welkome aanleiding, een oogenblik aandacht te vragen voor eenige bedenkingen, die de lezing van deze artikelen bij mij heeft gewekt. Hierbij zal ik mij natuurlijk in de eerste plaats aansluiten aan laatstgenoemd artikel.

Wij zien, dat de schrijver, afgeschrikt door de methodenstrijd [1]) tusschen intuitionisten en formalisten, eerst het geldigheidsprobleem in 't algemeen wil aanvatten, om pas daarna het speciale geldigheidsprobleem van de wiskunde op te lossen.

Daargelaten nu, of het werkelijk hopeloos is, te trachten binnen de wiskunde een oplossing van deze methodenstrijd te vinden, en anderzijds, of bij zijn werkwijze de door den schrijver zoo vurig verdedigde autonomie der wiskunde niet leelijk in het gedrang komt, doet zich reeds aanstonds de vraag voor, of deze manier van doen wel ooit eenig resultaat zou kunnen opleveren.

Een oppervlakkig onderzoek van de wetenschappen toont immers reeds, dat ze alle een zeker mathematisch element bevatten. Voor de exacte natuurwetenschappen behoeft dat geen nader betoog. Evenwel blijkt ook aan de eveneens in de overige wetenschappen bij voortduring toegepaste „Aristotelische logica" een nauwkeurig te omschrijven mathematisch karakter [2]) niet te ontzeggen, onver-

---

[1]) Het woord „methodenstrijd" lijkt niet gelukkig gekozen.

[2]) De Aristotelische syllogistiek is nl. niets dan een zeer eenvoudige theorie van elementaire bewerkingen met klassen.

schillig, op welk standpunt men zich moge stellen ten opzichte van het grondslagenprobleem van de wiskunde. Hieruit volgt nu, dat de geldigheid in een willekeurige wetenschap reeds een mathematische geldigheid vóóronderstelt.

Stellen we dus het geldigheidsprobleem voor een wetenschap, dan is dit zeker gecompliceerder dan dat voor de wiskunde; behalve een mathematisch geldigheidsprobleem omvat het b.v. nog de vraag, of het geoorloofd is, wiskunde toe te passen op de wijze, waarop het in deze speciale wetenschap is gebeurd. Hieruit volgt dus, dat het geen methodische voordeelen heeft, het algemeene geldigheidsprobleem vóór het geldigheidsprobleem der mathesis te behandelen.

Intusschen blijkt ook spoedig, dat de schrijver vooruitloopt op zijn beslissing ten aanzien van de methodenstrijd der mathesis: en wel op het punt, waar hij wiskunde definieert als „wetenschap zonder feiten."

Men zou kunnen meenen, dat tegen deze opvatting niets in te brengen is (tenzij men zich op empiristisch standpunt stelt). Toch gaat schr. hier hoogst overijld te werk. Immers juist het intuitionisme is o.i. het best op te vatten en te apprecieeren als een poging, om ook de wiskunde uitsluitend op feiten te fundeeren, dus als een positivistische opvatting van de wiskunde (merkwaardig is in dit verband, dat de streng-positivistische „Wiener Kreis" zoo nauw aan het formalisme verankerd blijft). De feiten, waarop dan de wiskunde wordt gefundeerd, zijn echter wel te onderscheiden van die, welke V r e d e n d u i n als ontstaansgrond der wiskunde aanduidt. De fundeering der mathesis op evidentie is o.i. onaantastbaar, zoo men onder evidentie verstaat zuivere feitelijkheid, en haar wel onderscheidt van subjectieve overtuiging.

In dezen zin berusten immers ook alle overige wetenschappen op evidentie.

Aan de andere kant wordt de formalistische opvatting van de wiskunde verworpen op grond van het feit, dat het formalisme de autonomie der wiskunde vernietigt. Hier wordt dus toegepast het prologisch principe der autonomie. „Dit principe houdt in, dat een gebied eerst dan tot een wetenschap wordt, wanneer het zijn specifieke geldigheidsnormen niet laat voorschrijven vanuit een ander gebied." De wijze, waarop hier uit dit beginsel een conclusie wordt getrokken, is evenwel ontoelaatbaar. Immers de these der formalisten is juist, dat wiskunde en taalwetenschap identiek zijn, in zoo-

verre, dat ze berusten op hetzelfde a priori: zoo hebben ze volgens den formalist hetzelfde grondbegrip: „teeken" of „symbool".

Er is dan ook geen sprake van, in deze gedachtengang, dat de formalistische mathesis zich haar geldigheid zou laten voorschrijven van een „ander" gebied uit.

Kort samengevat: de wiskunde kan volgens den formalist geen rechten van autonomie doen gelden tegenover de taalwetenschap, omdat ze er mee identiek is, en daarom mag V r e d e n d u i n zich tegenover de formalisten ook niet op het principe der autonomie beroepen.

We willen dit nog aan een voorbeeld toelichten. Physica en astronomie worden gewoonlijk beschouwd als verschillende wetenschappen en het behoeft wel geen betoog, dat dit op practische gronden [1]) is toe te juichen. Beschouwt men de zaak echter logisch, dan blijkt deze opvatting geen stand te kunnen houden. Physica en astronomie berusten op hetzelfde a priori. Wat zou men nu denken van den orthodoxen Vredenduiniaan, die zeggen zou: „Gij maakt U aan „fysicisme" schuldig, want Ge ontleent hier de astronomische geldigheidsnormen aan de fysica en vernietigt zoo de autonomie van de astronomie?"

Waar nu schr. er toe komt, zoowel de intuitionistische als de formalistische opbouw te verwerpen, is hij genoodzaakt een nieuwe wijze van opbouw te propageeren. Als zoodanig vinden we hier de opbouw van de wiskunde als een deductief stelsel, gefundeerd op axioma's; juist de methode, die aanleiding gaf tot de probleemstelling, waaruit zoowel formalisme als intuitionisme zijn voortgekomen. Dit is o.i. een stap achteruit, vooral waar schr. er nog niet in geslaagd is, op het wezen der deductie een nieuw licht te werpen. Deze opvatting van wetenschap als een deductief systeem werkt nu door in de heele prologica.

Het „a priori" eener wetenschap is voor schr. niets anders dan een stelsel oordeelen, waaruit de overige in de wetenschap optredende oordeelen (het „a posteriori" vormend) door deductie worden afgeleid. Zoo lezen we in „De logika der wiskunde", p. 43:

„We kiezen als voorbeeld het postulaat, dat de aarde een bol zou zijn. Zoodra als hypothese gesteld, wordt dit postulaat een deel van het fysisch a priori. Deduktief te werk gaande is nu, als

---

[1]) „noölogisch" beschouwd!

aardstraal, -massa en -rotatietijd bekend zijn, te berekenen hoe groot de versnelling van de zwaartekracht in verschillende punten der aarde is."

Hier neemt de schrijver het begrip „a priori" véél te ruim, door er maar elke hypothese onder te subsumeeren, die incidenteel ergens in de wetenschap wordt opgesteld.

Als „a priori" eener wetenschap in den zin der critische philosophie is o.i. alleen te beschouwen dat stelsel van grondbegrippen en grondbeginselen, dat de opbouw dier wetenschap „mogelijk maakt"; hiermee bedoelen we, dat die grondbegrippen en grondbeginselen ons in staat stellen, niet alleen het voor die wetenschap karakteristieke feitenmateriaal te exploreeren, maar tevens ter verklaring van die feiten speciale hypothesen in te voeren.

Zoo zijn als grondbegrippen der „klassieke" physica te noemen: ruimte, tijd en causaliteit, als grondbeginselen b.v. de beide hoofdwetten van de thermodynamica. De atoomtheorie is hier niet méér dan een speciale hypothese.

Het „a priori" is dus nog geenszins toereikend voor een volledig deductieve opbouw van de wetenschap; daarvoor moeten juist nog speciale hypothesen ingevoerd worden. Daaruit volgt nu echter weer, dat ten gevolge van een tegenspraak tusschen theorie en feit niet noodzakelijk het a priori wordt aangetast, maar in den regel alleen de speciale hypothesen.

Toch zijn de laatste decennia getuige geweest van ingrijpende veranderingen in het a priori der natuurkunde. Als nieuwe grondbeginselen traden b.v. op het relativiteitsbeginsel (E i n s t e i n) en het correspondentiebeginsel (B o h r). Juist E i n s t e i n's relativiteitstheorie is een typisch voorbeeld van een wijziging in het a priori, die geen gevolg was van een contradictie van de feiten met het oude a priori. Zoover ons bekend is, zijn alle feiten, die de theorie van E i n s t e i n verklaart, ook binnen het kader der klassieke theorie wel te interpreteeren, zij het dan ook op grond van hypothesen ad hoc. Deze theorie wordt echter daarom zoo gaarne aanvaard, omdat ze een basis blijkt te vormen voor verder gaande theoretische beschouwingen, waartoe binnen de „klassieke" theorie geen aanleiding bestond. [1])

---

[1]) Daardoor behaalde ook veel vroeger C o p e r n i c u s' wereldbeeld de overwinning op dat van P t o l e m a e u s.

En zoo is het ook met de quantumtheorie. Ook hier treedt een aperte tegenspraak tusschen a priori en feit niet op. De zaak is hier, dat het klassieke a priori geen basis levert voor het opstellen van hypothesen ter verklaring van een groote groep van verschijnselen. Dit veroorzaakt weer een crisis in het a priori.

Terugkeerend tot de wiskunde willen we nog opmerken, dat de identificatie van het a priori met het axiomastelsel niet heel gelukkig lijkt. Immers elk gedeelte van de wiskunde, dat op een eigen axiomastelsel gefundeerd kan worden, splitst zich af als een autonoom gebied, waardoor de eenheid der wiskunde verloren gaat.

Men trekke uit het voorgaande niet de conclusie dat wij geen sympathie zouden gevoelen voor de door Vredenduin in zijn werk gevolgde methode; ook o.i. belooft de critische methode veel voor de opbouw van de philosophie en voor het onderzoek naar de grondslagen der wetenschappen. Het voortgaan op de door Cohen en Natorp gevolgde weg getuigt nog te meer van moed, waar deze auteurs in hun geschriften over de exacte vakken niet steeds gelukkig zijn geweest.

Het is ons bekend, dat de denkbeelden van den schrijver nog in een toestand van ontwikkeling verkeeren. Mocht het voorgaande hiertoe iets bijdragen, dan heeft dit artikel aan zijn doel beantwoord.

UIT HET VERSLAG DER COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN IN 1933.

Ofschoon de resultaten der examens in de *wiskunde*, vergeleken met die van 1932, eenigen vooruitgang vertoonen, toch hebben ook dit jaar de A-candidaten zoowel in stelkunde als in meetkunde in meerderheid onvoldoende cijfers behaald. Dat de uitslag nog niet fraai is, blijkt ook, als men hun gemiddelde cijfer berekent: voor alle A-candidaten samen is dit voor stelkunde 2.45, voor meetkunde 2.34.

Ook nu weer — al is eenige verbetering ingetreden — moet dit verslag helaas beginnen met de opmerking, dat vele candidaten formules en stellingen uit het hoofd hebben geleerd, zonder ze te kunnen gebruiken. Het is de subcommissie onmogelijk, deze tekortkoming den candidaten te vergeven, ook al zal de oorzaak wel dikwijls moeten worden gezocht in gebrekkige opleiding. Het is een fout, die in toekomstige studenten niet kan worden geduld.

Veelal werd een candidaat eerst de vraag voorgelegd, of hij een bepaald onderwerp had bestudeerd; zelfs bij bevestigende beantwoording bleek dan dikwijls een vrijwel totaal gemis aan kennis van het bedoelde onderwerp te bestaan. Ook dit is naar de meening der subcommissie een zeer ernstig verschijnsel.

Na deze algemeene opmerkingen mogen enkele bijzonderheden volgen.

Zelfs die candidaten, welke de grafische voorstellingen hadden bestudeerd, hadden dikwijls veel moeite met de bepaling van den positieven en den negatieven toestand van drietermen zooals $ax^2 + bx + c$ (een veel verbreide meening onder de candidaten was, dat $ax^2 + bx + c$ positief is, als $b^2 - 4ac$ positief is); velen spraken over de symmetrie-as der parabool $y = ax^2 + bx + c$ zonder het bestaan daarvan te kunnen aantoonen; wat met reëel, wat met onmeetbaar wordt bedoeld, wisten zij te dikwijls niet. Formules voor de uiterste waarde van $ax^2 + bx + c$ kennen veel candidaten van buiten, maar veelal zonder ze te kunnen afleiden

of toepassen. Grafieken van breuken als $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}$ geven zeer veel moeite en zorg. Hoe het onbepaald zijn van een functie voor een bepaalde waarde van x, en hoe het constant zijn van een functie voor alle waarden van x zich grafisch openbaart, was den meesten niet bekend; ook veel B-candidaten schoten in dit opzicht te kort. Het strijdig zijn van twee vergelijkingen werd veelal verward met het valsch zijn van één. De merkwaardige producten en quotiënten waren dikwijls onvoldoende bekend; ook ontbinding in factoren schenen sommige candidaten op het examen te willen leeren. De oplossingen van stelsels vergelijkingen zooals

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 - 7x + 7y = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0 \end{array}\right\}$$

gaven te dikwijls onoverkomelijke moeilijkheden.

De meetkundige kennis der A-candidaten bleek in nog meer gevallen onvoldoende dan die der stelkunde (stelkunde: 112 voldoende, 119 onvoldoende; meetkunde: 98 voldoende, 131 onvoldoende), hetgeen begrijpelijk is, als men bedenkt, dat de meetkunde een veel ruimer gebied omvat dan de algebra. Repeteeren ook van de vlakke meetkunde en bestudeeren ook van cylinder, kegel en bol blijft eisch.

Bij de wiskunde-examens der B-candidaten zijn alle drie de onderafdeelingen door een meerderheid voldoende gemaakt. Het sterkst is deze meerderheid bij de stelkunde. Bijzondere opmerkingen zijn nauwelijks te maken; wellicht is het nuttig, nogmaals te wijzen op de noodzakelijkheid van goede bestudeering van de bundels in de analytische meetkunde, waarmee zooveel vraagstukken op elegante wijze kunnen worden opgelost.

BOEKBESPREKINGEN.

Compositio Mathematica. Internationaal Wiskundig Tijdschrift. P. Noordhoff, Groningen. Prijs per band (480 bladzijden) *f* 20,—.

Met nationalen trots kunnen we er ons op verheugen, dat op Nederlandschen bodem een wiskundig tijdschrift het licht heeft gezien, dat in alle opzichten internationaal is. Meer dan dat: de Compositio Mathematica, waarvan de eerste aflevering verschenen is, kan zich meten met de beste wiskundige tijdschriften ter wereld. De Redactie is over de geheele aarde verspreid, de artikelen zijn van bekende mathematici uit alle landen, en de daarin behandelde onderwerpen zijn van de grootst denkbare verscheidenheid: Getallentheorie (v. d. Corput, Watson). Functie- en Potentiaaltheorie (Wavre, Doetsch enz.), Fourier-reeksen (Lévy, Hille enz.), Differentiaalvergelijkingen (Loewy enz.) aan den eenen kant; Projectieve Meetkunde (Fubini), Topologie (Levi Cività, v. Neumann) en Puntverzamelingen (Khintchine) aan den anderen kant. Eerlijk is de ruimte verdeeld in Analyse en Meetkunde: aan ieder van deze gebieden is ongeveer 100 bladzijden gewijd.

De typografische uitvoering is voortreffelijk en verraadt een minutieuze zorg.

Uit de daareven gegeven opsomming moge blijken, dat de Comsitio Mathematica op hoog peil staat. Uitdrukkelijk moet hieraan worden toegevoegd, dat het uitsluitend nieuwe vindingen bevat. Desniettemin zijn zoo goed als alle artikelen zonder opzettelijke voorstudie dadelijk leesbaar. Zoo bevat deze eerste aflevering het eerste artikel van een serie, die v. d. Corput ten beste zal geven over de benadering van integralen met toepassingen op de Getallentheorie en andere deelen der wiskunde. Bizondere voorkennis vereischt de lectuur niet.

Moge het der Compositio Mathematica goed gaan en mogen alle beoefenaren der Wiskunde in Nederland den vooruitgang van de Wiskunde mee helpen bevorderen door op dit veelbelovende tijdschrift in te teekenen. J. Wolff.

Dr. P. Molenbroek, *Leerboek der Stereometrie*. Achtste druk, Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1934. 337 bladz., prijs geb. *f* 6.—.

Het leerboek der stereometrie was vroeger het tweede deel van het Leerboek der Meetkunde van Dr. P. Molenbroek; dit leerboek is indertijd ontstaan door samensmelting van werk van Dr. Molenbroek met het leerboek der meetkunde van Dr. P. van Geer. Het boek wortelt dan ook merkbaar in negentiende-eeuwsche beschouwingen. Wie eenigszins bekend is met schoolboeklitteratuur van eenige

tientallen jaren geleden, zal zich allicht verbazen, dat het werk thans nog een zoo belangrijke plaats inneemt. Dat dit het geval is, is te danken aan de werkzaamheid van Wijdenes, die de laatste drukken herzien heeft, eerst in samenwerking met den schrijver, later zelfstandig. Het is van veel belang voor a.s. leeraren, om beschouwingen te lezen, die boven de leerstof der scholen uitgaan; en zulke beschouwingen biedt dit werk. — De achtste druk toont in vergelijking met den zevenden weer belangrijke verbeteringen, vooral op het gebied der oppervlakten en inhouden. J. H. S.

Francesco Severi, *Lezioni di analysi I.* 15 fig., 423 blz.; geb. lire 75 (= *f* 9,80 ongeveer). Nicola Zanichelli, Bologna.

Inhoud I Calcolo combinatorio (1—20); II Determinanti (21—65); III Numeri reali (66—97); IV Numeri complessi (98—121); V Funzioni e limiti (122—184); VI Derivate e differenziali delle funzioni di una variabile (185—248); VII Serie numeriche e serie di Taylor (249—289); VIII Nozioni preliminari relative agli integrali (290—299); IX Funzioni algebriche (géneralità sulle funzioni algebriche; divisibilita; il teorema fondamentale; funzioni simmetriche; risultante; il teorema di Bézout; risoluzione delle equazioni di 3°e di 4° grado; approssimazione delle radici reali di un'equazione) (300—423).

Mijn Middel-Algebra was nog geen maand oud, toen ik bovengenoemd werk toegezonden kreeg ter bespreking. Mijn eerste indruk was: wel, een Middel-Algebra in het Italiaansch en toen ik het voorbericht inkeek, zag ik, dat ook Prof. Severi het oog had op verschillende gebruikers; hij noemt a.s. ingenieurs en zij, die de zuivere wiskunde als studievak verkiezen. Bij het lezen en doorbladeren vindt men veel, dat met de Middel-Algebra overeenkomt; men zie slechts de inhoudsopgave. Toch is er verschil, niet zoozeer in de theorie, waaraan nu eenmaal niet veel te veranderen is, maar vooral in de met kleine letter gedrukte „complementi ed esercizi" aan het eind van elk hoofdstuk. Die bevatten ongelooflijk veel stof, die ver uitgaat boven de theorie; ik zou haast zeggen, dat prof. Severi daarin zijn heele wezen heeft gelegd; en hij blijkt van allen en van alles ter dege op de hoogte te zijn, ook geschiedkundig. We treffen alle meesters en grootmeesters aan met de jaartallen, waarin ze een of ander hebben geschreven, de levende niet te vergeten, b.v. Brouwer en Van der Waerden. Als ik een opmerking mocht maken, dan zou het alleen zijn, dat het ontbreken van een alfabetische index een bezwaar is om al het mooie en fijne in dit boek op te zoeken. Het boek is m.i. uitermate geschikt voor de tweede klasse van gebruikers, die de schrijver zich voorstelt; voor de eerste gaat het naar onze inzichten (zeker in alles, wat met kleine letter staat gedrukt) veel te ver.

Als aardigheid voor Nederlandsche lezers mag wel vermeld worden, dat de Amsterdamsche burgemeester Hudde genoemd wordt bij de oplossing van de 3e en 4e machtsvergelijking (ook door andere Italianen). Uit $y^3 + py + q = 0$ wordt afgeleid (Middel-Algebra blz. 297

regel 3 v.o.) $z^2 + qz - \frac{1}{27} p^3 = 0$ (tusschen haakjes zegt de schrijver van deze vergelijking „che dicesi risolvente di Hudde). Verder noemt hij Scipione dal Ferro, Tartaglia en Cardano met hun prioriteit over een en ander en zegt „il metodo di risoluzione esposto è di solito attribuito a Hudde (1657)". Zooals men ziet: wij noemen alleen de Italianen; deze hun landslieden, maar ook een Hollander. Overigens heeft prof. Severi met de oplossing van de 4e graad alleen de methode „Tartaglia-Hudde" kort uitgelegd (dat is $x = u + v + w$ gesteld); maar deze is juist de meest ongemakkelijke van alle. P. W.

P. Wijdenes, Middel-Algebra. Tweede druk. Groningen—Batavia, P. Noordhoff, N.V., 1934, 611 bldz., prijs geb. *f* 12,50.

De tweede druk der Middel-Algebra vertoont zoowel uiterlijk als innerlijk groote verschillen met den eersten; gelijk gebleven is het doel: een aantal onderwerpen te behandelen, die gewoonlijk op de middelbare scholen niet of slechts zeer vluchtig worden besproken, en bij het hooger onderwijs bekend ondersteld, althans spoedig gebruikt worden. Het boek wil aldus een schakel vormen tusschen de algebra van het middelbaar onderwijs, de zoogenaamde Lagere Algebra, en de Hoogere. Vandaar de naam.

De opzet maakt, dat het werk bestaat uit eenige hoofdstukken, welker samenhang niet heel hecht is. Achtereenvolgens worden behandeld: volledige inductie, ongelijkheden, daarna permutaties en combinaties, rekenkundige reeksen van hoogere orde, determinanten en lineaire vergelijkingen, vervolgens een paar uitbreidingen van het getalbegrip: de onmeetbare getallen volgens de theorie van Dedekind en de complexe getallen, daarna het functiebegrip, theorie der veeltermen en hoogere-machtsvergelijkingen, binomiaalvergelijkingen, derde- en vierdemachtsvergelijking, scheiding der reëele wortels van eene hoogere-machtsvergelijking en benadering der wortels, vervolgens hoofdstukken over symmetrische functies en eliminatie, ten slotte limieten van varianten en functies, oneindig voortloopende reeksen, exponentieele en logarithmische functies eener complexe veranderlijke. Aan het slot van het boek vindt men eenige bladzijden historische aanteekeningen, betrekking hebbende op het leven en de werken der in het boek genoemde wiskundigen. Een uitvoerig register is voor de gebruikers een groot gemak.

Het boek is met zeer veel zorg geschreven, en staat mijns inziens op een hoog peil. De theorie is duidelijk en uitvoerig uiteengezet; de duidelijkheid wordt niet weinig verhoogd door een groot aantal met zorg gekozen uitgewerkte voorbeelden. Door het boek verspreid vindt men een groot aantal vraagstukken, terwijl aan het slot een 37-tal opgaven van de propaedeutische examens der Technische Hoogeschool geplaatst zijn.

Van enkele onderwerpen moge hier eene nadere bespreking volgen; de kleine bezwaren die ik hier en daar moet opwerpen, mogen aan den gunstigen indruk van het geheel geen afbreuk doen. De behandeling der volledige inductie werpt licht op eenige bijzonderheden,

die men elders niet vermeld vindt; ik betreur echter, dat de schrijver de typisch „lagere" opvatting huldigt, dat de volledige inductie een hulpmiddel is om allerlei ingewikkelde formules te bewijzen, die men op andere wijze niet baas kan. Van verschillende stellingen, die heel geschikt als voorbeelden van behandeling met volledige inductie hadden kunnen dienen, worden bewijzen met de gebrekkige stippelnotatie gegeven. De behandeling der ongelijkheden behoort mijns inziens in de Middel-Algebra niet thuis, als zijnde een geheel elementair onderwerp; echter heeft de schrijver het terecht opgenomen, omdat het in de elementaire leerboeken onvoldoende wordt behandeld. De bewijzen der verschillende eigenschappen zijn bijzonder eenvoudig; deze eenvoud is bereikt, doordat als uitgangspunt wordt genomen de bewering: a is kleiner dan b als $a—b$ negatief is. Als definitie is dit *niet* bedoeld, voor de definitie der betrekking kleiner dan in de verschillende getallengebieden verwijst de schrijver naar de Lagere Algebra (de definitie voor rationale getallen heb ik in het werk van dien naam niet kunnen vinden); het moet dus eene eerste stelling zijn, die direct uit de definitie volgt, en ik vrees, dat een nader onderzoek aan het licht zou brengen, dat de eenvoud der bewijzen in het hoofdstuk „ongelijkheden" slechts schijn is. Bij de behandeling der veeltermen mis ik de gewone deeling van veeltermen, zooals die op de scholen wordt behandeld; het is waar, dat dit onderwerp eerder in de Lagere Algebra dan in de Middel-Algebra thuis behoort, maar het wordt, voor zoover ik weet, in geen enkel Nederlandsch algebraboek besproken. En toch is het niet onbelangrijk, te weten, waarom bij eene opgaande deeling de uitkomst niet afhangt van de keuze der rangletter, bij eene niet-opgaande echter wel. En om te begrijpen, waarom, alle commutativiteiten ten spijt, bij de deeling van veeltermen rangschikking wordt voorgeschreven. Zooals bekend is, wordt het antwoord op deze vragen gegeven door het bewijs van de volgende stelling: Is een veelterm $V(x)$ het product van twee veeltermen $W_1(x)$ en $W_2(x)$, dan wordt $W_2(x)$ gevonden door toepassing van den deelingsalgorithmus met $V(x)$ als deeltal en $W_1(x)$ als deeler.

Ik zou kunnen uitweiden over zinswendingen en notaties, die met mijn persoonlijken smaak niet overeenkomen, maar doe dit niet, om niet den indruk te wekken, dat de tekortkomingen van dit degelijke boek de deugden overtreffen. Immers het tegendeel is waar.

Ik hoop, dat de Middel-Algebra sterk moge bijdragen tot de verdieping der kennis van de algebra bij de jongere generatie der Nederlandsche wiskundigen. J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

P. WIJDENES, *Antwoorden* op de vraagstukken in de tweede druk van Middel-Algebra met vele aanwijzingen . . *f* 2.—

P. WIJDENES, *Oplossingen van de vraagstukken* uit de 8e druk van Dr. P. Molenbroek's Leerboek der stereometrie, 3e druk . . . . *f* 2.25

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra* II. 6e druk, geb. . . . . *f* 2.25

Prof. Dr. J. G. RUTGERS, *Leerboek der Beschrijvende Meetkunde.* 1e deel, 2e stuk . . . . *f* 2.25
Inhoud: De kegelsneden. Bol. Cylinder en kegel met vlakke doorsneden en schaduwen; 140 figuren en 52 opgaven.

Dr. D. J. E. SCHREK, *Beginselen der analytische Meetkunde.* 4e druk, ing. *f* 2.75, geb. . . . . *f* 3.25

Dr. W. L. VAN DE VOOREN, *Grenswaarden,* een inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening. **2e druk,** *f* 1.90, geb. . . . . *f* 2.50
Inhoud: Constante en veranderlijke grootheden. — Het begrip „functie". — Eenige voorbeelden van grenswaarden. — Definitie van grenswaarde of limiet. — $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^n$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x^2}$; $y = \frac{1}{x^n}$. De gon. functie. — Differentiaalquotient van een som, een product en een quotient van twee functies. — Id. van een samengestelde functie. — Oppervlakte. — Onbepaalde integraal. — Regels in de integraalrekening. — Integreeren volgens de substitutiemethode. — De logarithmische functie. — Het getal e. — e^x. — Toepassingen. — Gemengde opgaven.

De kennismaking met dit boekje wordt zonder voorbehoud aanbevolen; de stof is kort en nauwkeurig behandeld, zoodat het in de B-afdeeling van het gymnasium en het lyceum kan worden doorgewerkt. W.

Van Gebr. Van der Hoek, Leiden.

Wiskundige en litterarische opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten in 1933 (Opgaven van het „Staatsexamen") . . . . *f* 0.50